

Mathcad[®]

Harjoituskirja perusteet

© 2016 Zenex Computing Oy

Mathcad® Harjoituskirja

Helmikuu, 2016

Tekijänoikeus © 2005-2016 Zenex Computing OY

Tekijänoikeus

Tämä käsikirja on tekijänoikeuslain alainen. Sitä ei saa edes osittain kopioida ilman Zenex Computing Oy:n kirjallista lupaa.

Painettu Suomessa

Sisällysluettelo

Esittely	4
Tiedon syöttö ja muokkaus.....	11
Vaihe vaiheelta 1	17
Tehtäviä 1: Matemaattiset alueet	19
Vaihe vaiheelta 2	24
Tehtäviä 2: Määritelmät	27
Vaihe vaiheelta 3	37
Tehtäviä 3: Matriisit ja arvoalueuuttujat	39
Muotoilu ja dokumentointi	43
Vaihe vaiheelta 4	45
Tehtäviä 4: Muotoilu ja dokumentointi	46
Vaihe vaiheelta 5	54
Tehtäviä 5: Tulosten ja matriisien esitystavat.....	56
Vaihe vaiheelta 6	61
Tehtäviä 6: Dokumentin järjestäminen ja muokkaaminen	65
Funktiot.....	68
Vaihe vaiheelta 7	76
Tehtäviä 7: Funktiot ja ratkaisulohko	83
Yksiköt.....	85
Vaihe vaiheelta 8	92
Tehtävät 8: Yksiköt.....	93
Kuvaajat.....	94
Vaihe vaiheelta 9	105
Tehtäviä 9: Kuvaajat.....	109
Symbolinen laskenta	111
Vaihe vaiheelta 10	115
Tehtäviä 10: Symbolinen laskenta	117
Liite B - Ratkaisut	120

Esittely

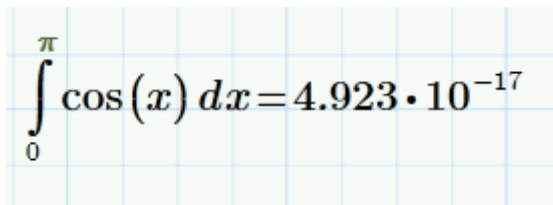
Yleiskuvaus

Tervetuloa tutustumaan Mathcadiin. Mathcadin työympäristö on luotu käyttäjän näkökulmasta. Mathcadin käyttöliittymällä voit sekä laskea että dokumentoida työsi tehokkaasti. Mathcad muodostuu seuraavista ominaisuuksista:

- matemaattista merkintätapaa noudattava teknisen laskennan ympäristö
- joustava tekninen tekstinkäsittely

Tämä tarkoittaa sitä, että Mathcadissa laskutoimituksien suorittaminen ja dokumentointi on yhdistetty yhdeksi prosessiksi, mikä kohottaa työtehoa oleellisesti.

Toisin kuin muut tekniset laskentaohjelmat Mathcad esittää matematiikkaa kuin kynällä paperille kirjoitettuna. Mathcadin käyttöä varten ei tarvitse erikseen opetella monimutkaista ohjelmointikieltä tai taulukkolaskennan syntakseja. Mathcadin käyttöliittymässä näkyy tyhjä dokumentti, johon kirjoitetaan yhtälöitä ja tekstiä sekä lisätään kuvaajia ja funktioita. Matemaattiset lausekkeet näyttävät samalta kuin paperilla tai taulukkokirjassa:


$$\int_0^{\pi} \cos(x) dx = 4.923 \cdot 10^{-17}$$

Ei tarvitse olla Mathcadin käyttäjä ymmärtääkseen Mathcad-dokumentin sisältöä. Lisäksi kaikki Mathcad-dokumentit sisältävät dynaamista laskentaa. Mikäli muutat jotakin arvoa laskelmissasi, Mathcad päivittää automaattisesti laskutoimitukset ja tästä arvosta riippuvat tulokset.

Nyt aloitamme tutustumisen Mathcadin työympäristöön.

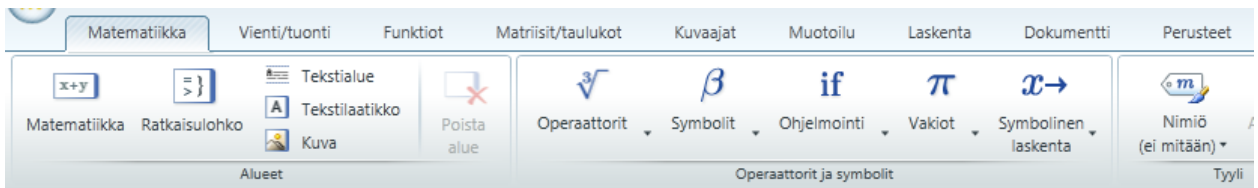
Mathcadin työympäristö: Valintanauha

Alkajaisiksi huomataan valintanauha ja pikatyökalurivi ikkunan yläreunassa. Valintanauhalta löydät valikkovaihtoehtoja ja niitä vastaavat ikonit usealle eri

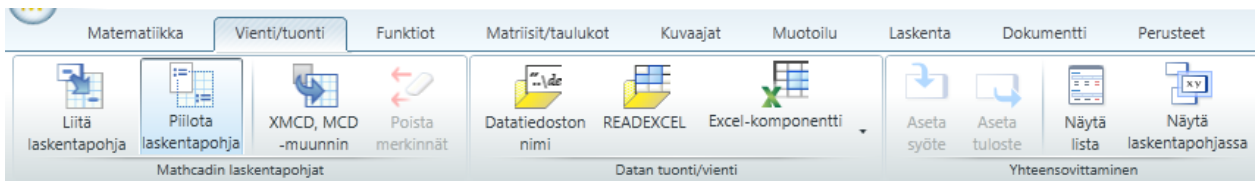
toiminnoille. Muutamat näistä ovat vain Mathcadille ominaisia, kuten Matematiikka (Math), Funktiot (Functions) ja Matriisit/taulukot (Matrices/Tables). Tutustutaan nyt lyhyesti valintanauhaan.

Välilehdet

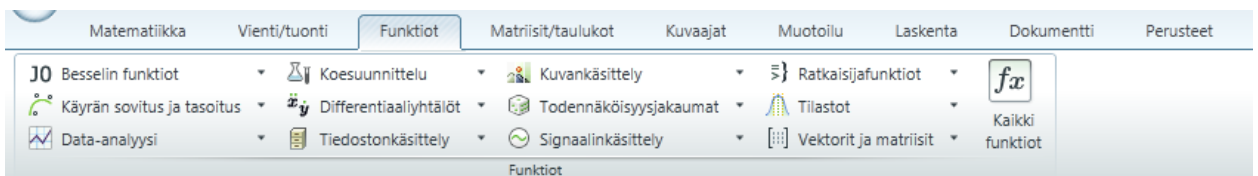
Tämä on **Matematiikka**-välilehti, jolta voit käydä helposti hiiren painalluksella valitsemassa laskelmiin peruslaskutoimituksia.



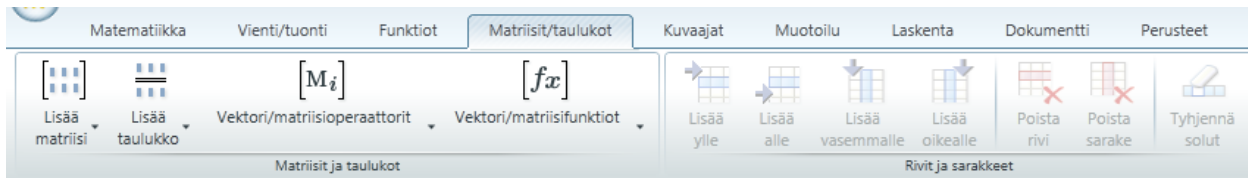
Vienti/tuonti-välilehdeltä voit liittää laskentapohjaan toisia laskentapohjia sekä tuoda dataa Excelistä, Creo Parametricistä ja Windchill Workgroup Managerista.



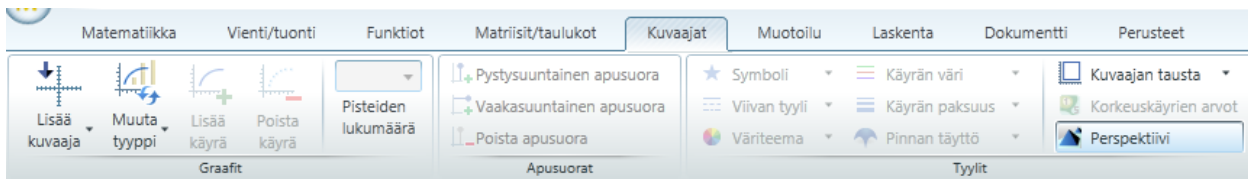
Funktiot-välilehdeltä löytyvät kaikki Mathcadin funktiot aina Besselin funktioista vektoreiden ja matriisien käsittelyyn.



Matriisit/taulukot-välilehdeltä voit lisätä vektoreita, matriiseja ja taulukoita. Välilehti sisältää myös näiden muokkaamiseen tarvittavat toiminnot.



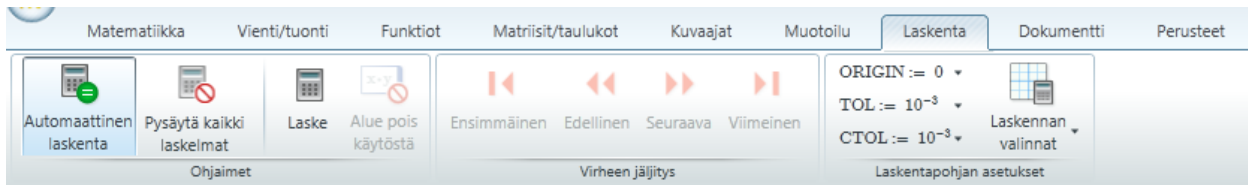
Kuvaajat-välilehdeltä voit lisätä laskentapohjaan 2D- ja 3D-kuvaajia funktioiden tai muun datan pohjalta.



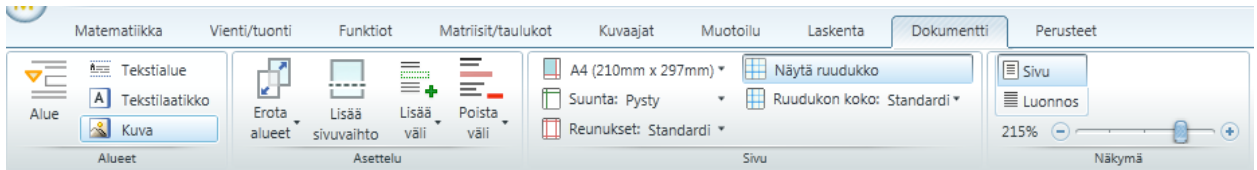
Muotoilu-välilehdeltä voit muuttaa muun muassa muuttujien, funktioiden ja tekstialueen tyyliä.



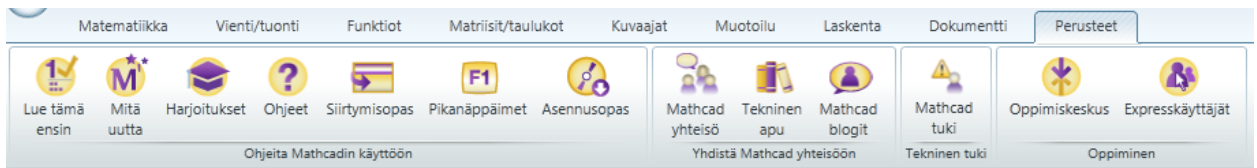
Laskenta-välilehdeltä voit hallita laskelmien suorittamista, määrittää matriisien ensimmäisen alkion indeksin sekä säätää toleranssia.



Dokumentti-välilehdeltä voit muuttaa laskentapohjan ruudukon kokoa, vaihtaa näkymää ja tehdä muita sivuasetuksia.



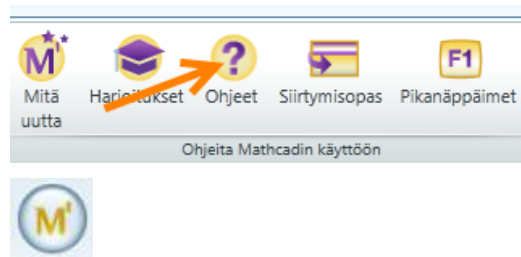
Perusteet-välilehdeltä löytyy paljon lisätietoa Mathcadin toiminnasta.



Useimmilla välilehdiltä löytyvillä toiminnoilla on pikanäppäimet. Liikuttamalla hiiri halutun toiminnon päälle ilmestyy näkyviin siitä lyhyt ohjeteksti sekä pikanäppäimet.

Mathcad käsikirja

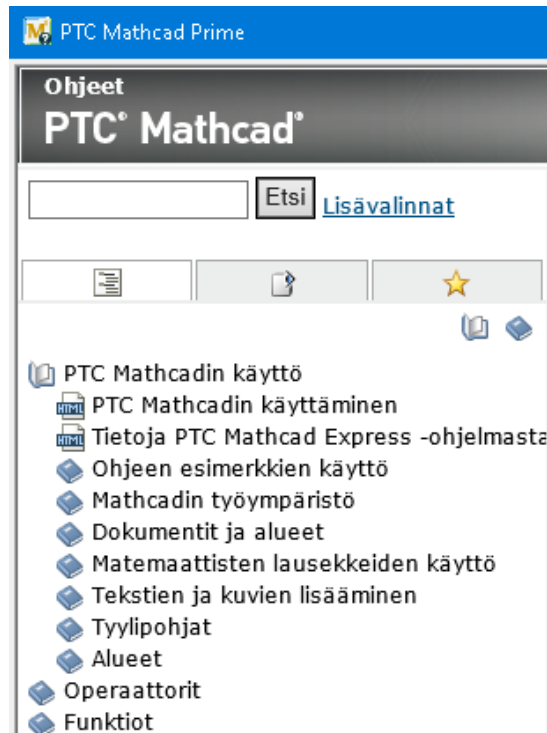
Mathcadin ohjeet on aukaistavissa **Perusteet**-välilehdeltä, jonka voit ottaa käyttöön napsauttamalla Mathcad-painiketta ohjelman vasemmassa yläkulmassa ja valitsemalla *Matcadin asetukset / Asetukset*.



Ohjeet

Ohjeista löydät paljon ohjeita Mathcadin käyttöön ja saat lisätietoja toiminnoista. Ohjeisiin pääset esimerkiksi painamalla F1.

Ohjeet tarjoavat käyttäjälle paljon esimerkkejä, joista matemaattiset lausekkeet voidaan useimmiten kopioida laskentapohjaan. Näin käyttäjä voi hyödyntää ja muokata esimerkkejä.



Harjoitukset ja Referenssitaulukot

Ohjeet sisältävät myös Harjoitukset ja Referenssitaulukot. Harjoitukset voidaan avata myös suoraan Perusteet-valikosta.

Harjoituksien avulla käyttäjä voi opetella ohjelman käyttöä. Ne sisältävät erilaisia tehtäviä, ja ne on suunniteltu antamaan käyttäjälle nopean katsauksen tiettyyn Mathcadin ominaisuuteen aina laskutoimitusten lisäämisestä yksikköjen käyttöön. Ohjelmasta löytyy myös vaativampia harjoituksia, jotka käsittelevät Mathcadin jotakin erityisominaisuutta.

Referenssitaulukot sisältävät fysikaalisia vakioita, matemaattisia kaavoja ja muuta hyödyllistä tietoa.

MATHCAD KÄYTTÄJÄFOORUMIT

Mathcad keskusteluryhmien avulla voit olla yhteydessä muihin Mathcad-käyttäjiin ympäri maailmaa. Valitsemalla *Perusteet / Mathcad yhteisö* pääset suoraan tälle sivustolle.

KÄYTTÄJIEN WEB-KIRJASTOT

Web-kirjastot sisältävät Mathcadin käyttäjien tekemiä sähköisiä tiedostoja, joiden käyttö on rajoittamatonta.

KAUPALLISET WEB-KIRJASTOT

Alkuperäisen Mathcadin luoja Allen Razdow on perustanut uuden uuden palvelun Truenumbers, www.truenum.com.

Knovel Math sivustolle voi tehdä vuositilauksen.

TEKNISEN TUEN VERKKOSIVUT

Mathcadin nykyinen valmistaja on PTC. PTC.com teknisen tuen verkkosivusto sisältää esimerkkitiedostoja sekä virheenmäärittäsinformaatiota.

Sivuilta on myös löydettävissä lisäharjoituksia sekä QuickSheet-dokumentteja, joita ei saada Mathcadin asennuksen yhteydessä.

Tekninen tuki: puhelimitse, faxilla, sähköpostilla ja verkossa

Tekninen tuki antaa lisätietoja ja vastaa kysymyksiin ma-pe klo 8.00 – 16.00.

Puhelin 010 3225 190

Fax 010 3225 190

E-mail info@zenex.fi

Internet www.mathcad.fi

Vastauksia tavallisimpiin kysymyksiin löydät sivulta www.mathcad.fi

Huomioi, että vaativammat kysymykset ohjelmasta tulee lähettää e-maililla tai faxilla. Liitä kysymykseesi tällöin Mathcad-tiedosto mikäli mahdollista.

Tiedon syöttö ja muokkaus

Alueet

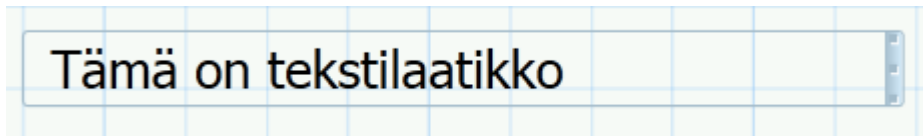
Mathcad-laskentapohja koostuu alueista. Jokainen yhtälö, tekstinpätke tai kuvaaja on dokumentissa yksittäinen alue. Mathcadia käytettäessä kohdataan useanlaisia alueita:

- matemaattinen alue
- tekstialue
- kuva-alue
- taulukko
- ratkaisulohko

Jokaisella alueella on omat ominaisuutensa ja muokkaustapansa.

Tekstialue

Mathcadissa on kaksi erilaista tekstile tarkoittettua aluetta: *tekstilaatikko* on pieni suorakulmio, kun taas *tekstialue* ulottuu laskentapohjan päästä päähän.



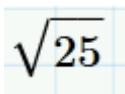
Tekstialue voidaan luoda kahdella eri tavalla:

- Paina Ctrl+T lisätäksesi tekstilaatikon tai paina Ctrl+Shift+T lisätäksesi tekstialueen.
- Valitse *Matematiikka / Tekstilaatikko* tai *Matematiikka / Tekstialue*.

Matemaattinen alue



muuttujat



vakiot

$$x := 5 \text{ cm}$$

määrittelyt

$$a^2 + b^2 = c^2$$

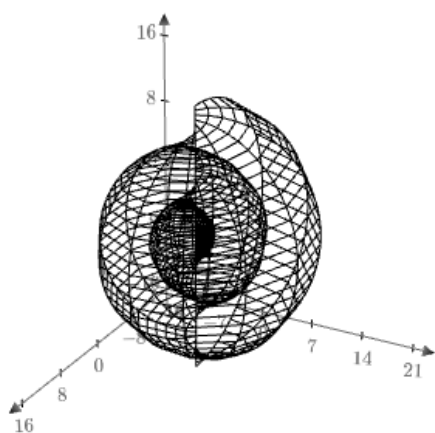
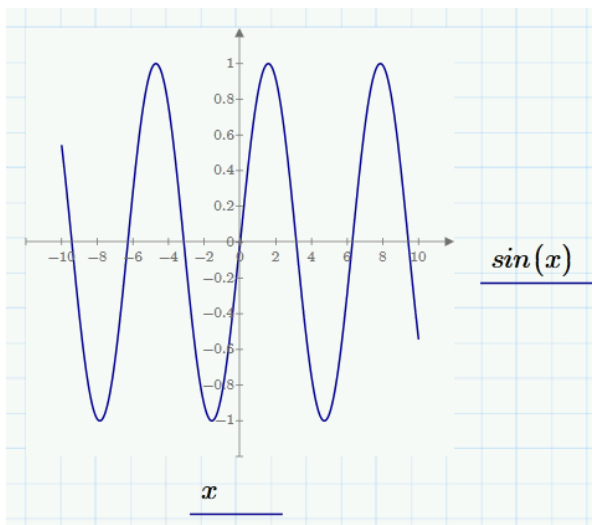
ehtolauseet

$$f(x) := x^2 - x + 5$$

funktiot

$$X(u, v) := (2 + \cos(u)) \cdot \cos(v)$$

2D- ja 3D-kuvaajat



$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad n := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

vektorit ja matriisit

n	m
()	(<i>kg</i>)
1	0.501
2	1.342
3	1.407
4	2.421
5	2.929

taulukot

Matemaattisella alueella kursori näkyy sinisenä symbolina, kuten yllä olevassa taulukossa.

Matemaattisen alueen lisäämisessä voi yksinkertaisesti käyttää Matematiikka-työkaluriviä tai alkaa vain kirjoittamaan.

Kuva-alue



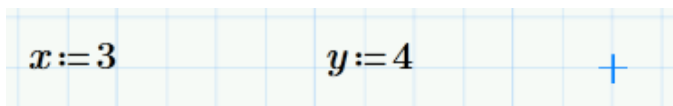
Kuva voidaan lisätä Kuva-painikkeesta, joka löytyy **Matematiikka**-välilehdeltä. Laskentapohjaan ilmestyy tällöin Selaa kuvia -painike.

$R := \text{READ_IMAGE}(\text{"camera.bmp"})$

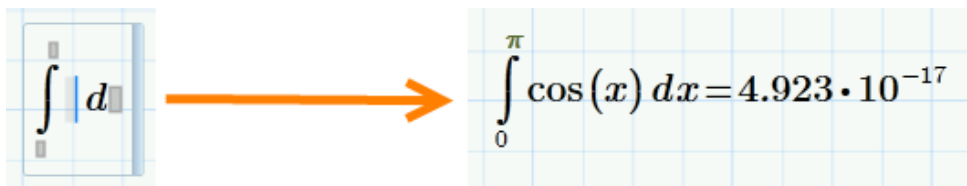
Toisaalta kuva voidaan myös lukea laskentapohjaan, jolloin siihen voidaan soveltaa useita erilaisia kuvankäsittelyyn liittyviä funktioita.

Lausekkeiden kirjoittamisen ja muokkaamisen perusteet

Kuten kävi jo ilmi, matemaattiset alueet voidaan luoda yksinkertaisesti kirjoittamalla. Mathcad nimittäin olettaa, että olet lisäämässä dokumenttiisi matemaattista aluetta. Sininen risti ruudulla ilmoittaa paikan, johon uusi alue sijoittuu.


$$x := 3 \qquad y := 4$$

Voit myös syöttää ensin jonkun Mathcadin operaattoreista ja sitten täydentää yhtälöä matemaattisilla lausekkeilla paikanvaraajien kohdille.

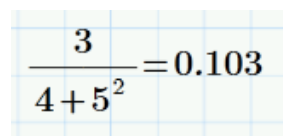

$$\int d \quad \longrightarrow \quad \int_0^{\pi} \cos(x) dx = 4.923 \cdot 10^{-17}$$

Useat matemaattiset lausekkeet voidaan luoda pelkästään muuttujilla, numeroilla ja operaattoreilla.

Kun kirjoitat:

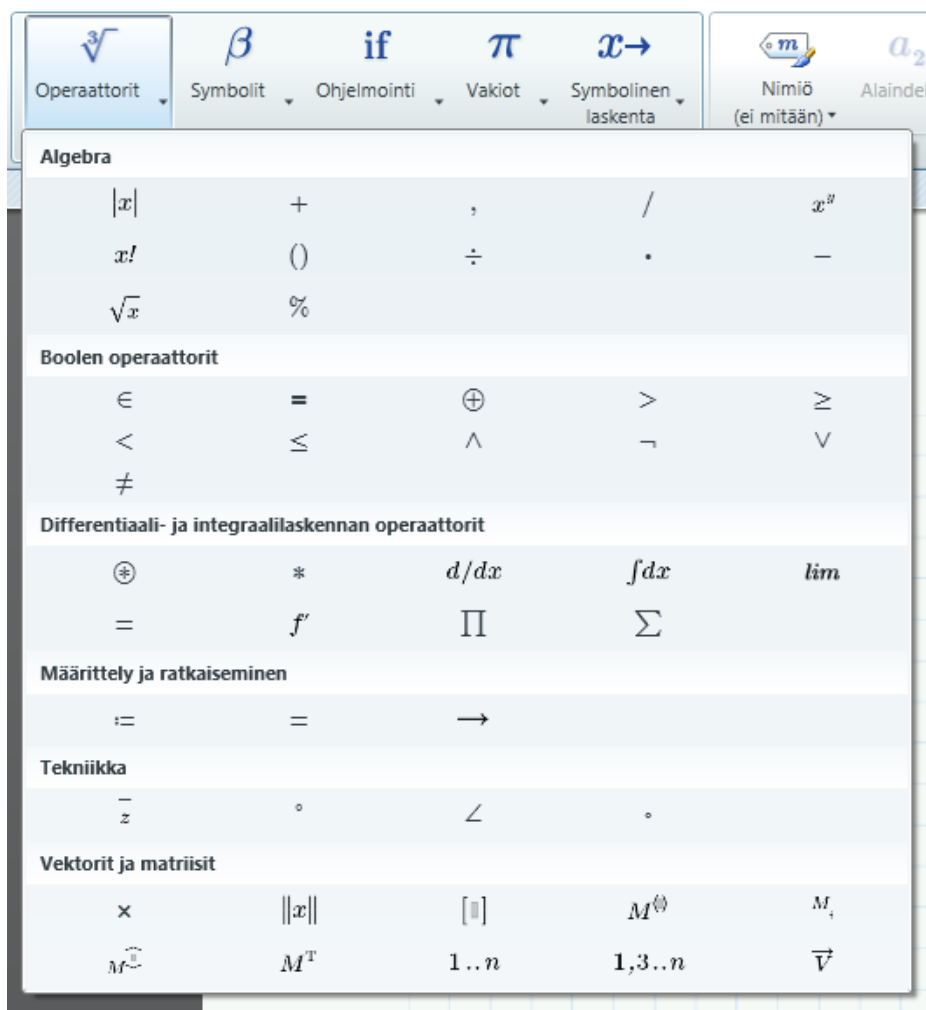
$$3/4+5^2=$$

näet ruudulla


$$\frac{3}{4+5^2} = 0.103$$

Tästä esimerkistä käy ilmi, että Mathcadilla voidaan suorittaa samankaltaisia laskuja, joihin useasti käytetään tavallista laskinta. Huomaa kuitenkin esityksen looginen ulkoasu – kuin olisit kirjoittanut sen kynällä paperille.

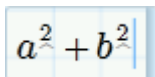
Lausekkeiden rakentamisessa auttaa myös Mathcadin **Matematiikka**-välilehden **Operaattorit**-valikko, johon operaattorit on luokiteltu niiden toiminnallisuuden mukaan.



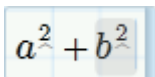
Alettaessa käyttää Mathcadia yhä monimutkaisempiin laskutoimituksiin on tärkeää ymmärtää matemaattisella alueella käytetyn sinisen kursorin toiminta. Lausekkeen muokkaamisessa muokkaussuunnalla on nimittäin merkitystä.

Matemaattista lauseketta voidaan muokata lähes samaan tapaan kuin tekstiä. Askelpalautinta ja Delete-näppäintä käytetään merkkien poistamiseen kursorin vasemmalta ja oikealta puolelta.

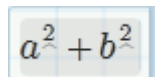
Välilyöntinäppäimellä voidaan ryhmitellä lausekkeen termejä eli valita useampia niistä. Huomataan, että välilyönillä valittuun alueeseen sisältyy yhä enemmän termejä, kunnes lopulta palataan taas aloituskohtaan. Tällä tavoin välilyöntiä voidaan käyttää lausekkeen läpikäymiseen kiertämällä se ”ympäri”.



$$a^2 + b^2$$



$$a^2 + b^2$$

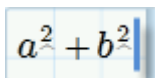


$$a^2 + b^2$$

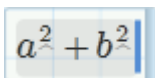
Operaattorin syöttäminen lausekkeeseen on aivan yhtä selkeää. Sijoita sininen kursori kohtaan, johon haluat operaattorin, ja kirjoita se.

Mikäli haluat sijoittaa operaattorin koko lausekkeeseen, on syytä kiinnittää erityistä huomiota sinisen kursorin sijaintiin, koska tämä vaikuttaa olennaisesti lausekkeen matemaattiseen merkitykseen.

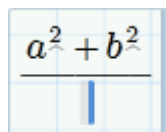
Kun termit ryhmitellään kursorin ollessa termien oikealla puolella ja painetaan /, niin ryhmitellyt termit siirtyvät osoittajaan.



$$a^2 + b^2$$

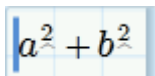


$$a^2 + b^2$$

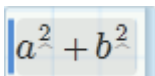


$$\frac{a^2 + b^2}{}$$

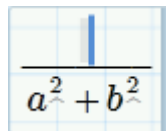
Kun taas termit ryhmitellään kursorin ollessa termien vasemmalla puolella ja painetaan /, niin ryhmitellyt termit siirtyvät nimittäjään.



$$a^2 + b^2$$



$$a^2 + b^2$$



$$\frac{1}{a^2 + b^2}$$

Operaattoreita voidaan poistaa samalla tavoin.

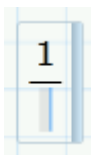
Vaihe vaiheelta 1

Harjoitus 1

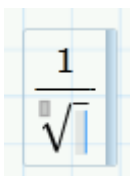
Tässä harjoituksessa kirjoitetaan Boolean ehtolause:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sin(x + \cos(x)) = 0$$

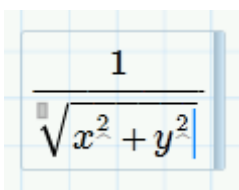
1. Syötä luku 1.
2. Valitse / Operaattorit-listasta tai näppäimistöltä.



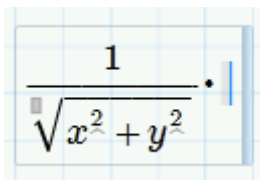
3. Valitse neliöjuuri Operaattorit-listasta tai paina \ näppäimistöltä.



4. Syötä $x^2 + y^2$ käyttäen potenssiin korotusta Operaattorit-listasta tai valitsemalla ^ näppäimistöltä.



5. Käytä oikeaa nuolinäppäintä saadaksesi kursori oikeaan paikkaan. Valitse kertomerkki Operaattorit-listasta tai valitsemalla * näppäimistöltä.



6. Valitse sinifunktio Funktiot-välilehdelä tai kirjoita se näppäimistöltä.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sin()$$

7. Kirjoita muuttujaksi x ja sitten +.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sin(x +)$$

8. Syötä cos(x) Funktiot-välilehdelä tai kirjoittaen.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sin(x + \cos(x))$$

9. Käytä oikeaa nuolinäppäintä saadaksesi kursori oikeaan paikkaan ja valitse Boolean yhtäsuuruusmerkki Operaattorit-listasta. (Huom. Voit myös käyttää pikavalintaa Ctrl ja +)

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sin(x + \cos(x)) = 0$$

Tehtäviä 1: Matemaattiset alueet

1. Kirjoita seuraava lauseke käyttäen Operaattorit-valikkoa, joka löytyy Matematiikka-välilehdestä.

$$\int_1^{\frac{\pi}{4}} \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{2\pi\cdot\theta}{5}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi\cdot\phi}{10}\right) e^{5\left(\frac{\theta}{\phi}\right)} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\theta^2 + \phi^2}}\right) \cos(\theta)^2 + \sin(\phi)^3}{d\theta d\phi}$$

Vihjeitä:

Syötä ensin lausekkeen sisempi integraali, jonka jälkeen voit valita sen ja lisätä ulomman integraalin. Lausekkeet voidaan kirjoittaa monella eri tavalla.

- π saadaan myös painamalla p ja sitten **Ctrl + g**
- θ saadaan myös painamalla q ja sitten **Ctrl + g**
- ϕ saadaan myös painamalla f ja sitten **Ctrl + g**

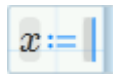
Määritelmät

Otamme seuraavaksi ensimmäisen askeleen numeeriseen laskentaan keskittyen määrittelyjen luomiseen Mathcadissa. Tästä on käyttäjälle apua rakennettaessa nopeasti monimutkaisiakin matemaattisia lausekkeita.

Määritelmät ovat Mathcadin perustoimintoja, joista lähdetään liikkeelle. Määritelmä voidaan luoda kahdella tavalla:

- kirjoittamalla : näppäimistöltä
- poimimalla määrittelyn **Operaattorit**-valikosta.

Tavallisesti määriteltävä muuttuja kirjoitetaan ensin ja sen jälkeen määritelmä jommallakummalla yllä mainituista menetelmistä. Tällöin Mathcad luo operaattorin oikealle puolelle paikanvaraajan, jonka paikalle voidaan lisätä haluttu numeerinen arvo.

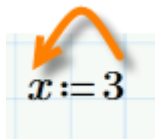


Vaihtoehtoisesti voidaan alueeseen ensin syöttää määritelmä, jolloin sen ympärille ilmestyy kaksi paikanvaraajaa.



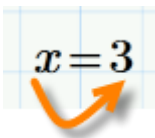
Huomaa, että Mathcadissa käytetään := (kaksoispiste-yhtäsuuruus) -merkkiä määritelmässä. Siihen, miten ohjelmassa käytetään tavallista = -merkkinä, paneudutaan seuraavaksi. Syy merkkien eroavaisuuteen on yksinkertainen ja looginen. Määrittelyoperaattoria eli kaksoispiste-yhtäsuuruusmerkkiä käytetään määritelmissä, *tallennettaessa* oikealla olevaa arvoa vasemmalla olevalle muuttujalle.

Seuraavassa sijoitamme arvon 3 muuttujalle x , eli x saa tästä lähtien arvon 3.



$$x := 3$$

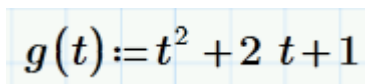
Halutessamme tietää lausekkeen tai muuttujan arvon, käytämme ratkaisuoperaattoria eli tavallista yhtäsuuruusmerkkiä $=$ laskimen tapaan. Yhtäsuuruusmerkki kertoo ohjelmalle, että haluamme tulostaa muuttujan tai funktion käytössä olevan arvon.



$$x = 3$$

Samankaltainen määrittelyprosessi pätee kaikkiin Mathcadissa suoritettaviin määritelmiin: muuttujat, funktiot, taulukot sekä *arvoaluemuuttujat*.

Funktio määritellään aivan kuten paperille kirjoitettaessa.



$$g(t) := t^2 + 2t + 1$$

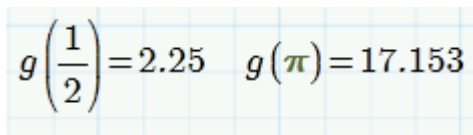
(1) Kirjoita **$g(t)$**

(2) Kirjoita :

(3) Kirjoita **t^2 [oikea nuolinäppäin] + 2*t + 1**

Mathcad ymmärtää, että t on funktiossa riippumaton muuttuja, koska se sisältyy funktion g argumenttiin.

Nyt voidaan haluttaessa määrittää funktion arvo jollakin muuttujan t arvolla.



$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2.25 \quad g(\pi) = 17.153$$

(1) Kirjoita **$g(1/2)$** tai **$g(\pi)$**

(2) Kirjoita =

Mathcadissa muuttujien ja funktioiden nimet voivat sisältää paljon erilaisia merkkejä kuten:

- ala- ja yläindeksit
- numerot
- alaviiva (_)
- yläpuolinen indeksointipilkku (') (ei sama kuin heittomerkki)
- prosenttimerkki (%)
- kreikkalaiset kirjaimet, jotka saadaan painamalla **Ctrl + g** vastaavan latinalaisen merkin jälkeen
- äärettömän merkki (∞)

Huomaa kuitenkin seuraavat rajoitukset:

- Nimet eivät voi alkaa numerolla
- Kaikki merkit tulee kirjoittaa samalla fontilla
- Mathcad ei tunnista eroa muuttujien ja funktioiden nimien välillä.

Tässä kohtaa on syytä huomauttaa, että Mathcadissa on useita tapoja merkitä yhtäsuuruutta:

Määrittely

$$x := 3$$

Määrittelee muuttujan x kolmoseksi

Ratkaiseminen

$$x = 3$$

Näyttää muuttujalle x talletetun arvon

Boolean yhtäsuuruus

$$x = 1$$

Vertaa muuttujaa x ykköseen. Palauttaa arvoksi joko true (1) tai false (0):

$$x = 1 = 0$$

Symbolinen ratkaiseminen

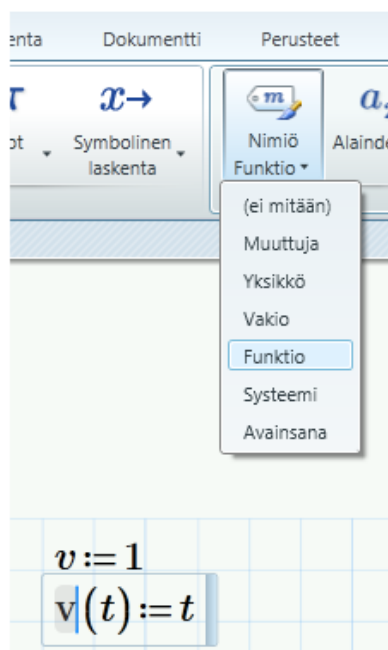
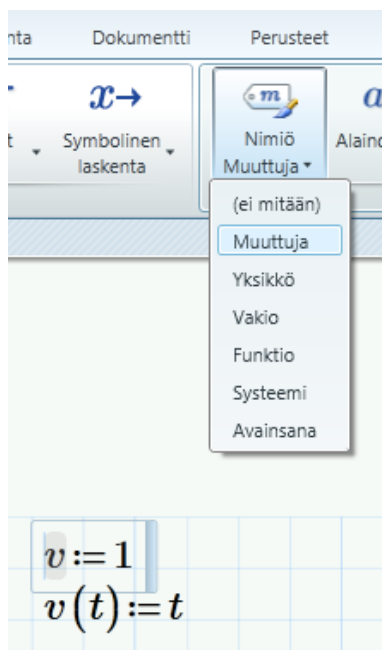
$$\begin{aligned} g(t) &:= t^2 + 2t + 1 \\ g(\pi) &\rightarrow 2 \cdot \pi + \pi^2 + 1 \end{aligned}$$

Laskee lausekkeelle symbolisen ratkaisun.

Mathcad Prime saattaa varoittaa määritellessäsi uudestaan jo käytössä olevaa muuttujaa tai funktiota.

$$\begin{aligned} v &:= 1 \\ v(t) &:= t \\ v &= \text{"Function: } v\{\text{VARIABLE}\}" \end{aligned}$$

Käytettäessä samannimisiä funktioita ja muuttujia ne tulee erotella **Matematiikka**-välilehden Nimiöstä. Asetetaan ensimmäinen v muuttujaksi ja toinen v funktioksi.



Laskelmat toimivat jälleen, kun vielä asetetaan Nimiöstä, ollaanko ratkaisemassa muuttujaa vai funktiota.

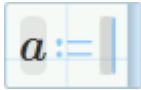
$$\begin{aligned} v &:= 1 \\ v(t) &:= t \\ v = 1 \quad v(2) &= 2 \end{aligned}$$

Vaihe vaiheelta 2

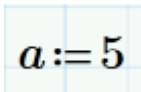
Harjoitus 1

Tässä harjoituksessa opetellaan luomaan määritelmä ja ratkaisemaan lauseke.

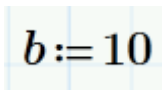
1. Kirjoita a .
2. Valitse määritelmän symboli Operaattorit-valikosta tai kirjoita $:$ näppäimistöltä.


$$a :=$$

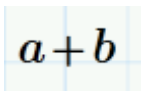
3. Syötä numero 5 paikanvaraajaan.


$$a := 5$$

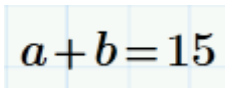
4. Toista vaiheet 1 – 3 ja määrittele muuttujan b arvoksi 10.


$$b := 10$$

5. Laske a ja b yhteen. Kirjoita $a + b$.


$$a + b$$

6. Valitse ratkaisuooperaattori Operaattorit-valikosta tai kirjoita $=$.

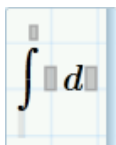

$$a + b = 15$$

Harjoitus 2

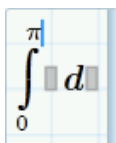
Tässä harjoituksessa lasketaan seuraava integraali:

$$\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{5}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{7}\right) dt = -0.769$$

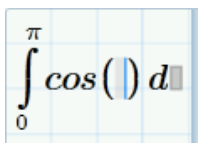
1. Syötä määrätty integraali Operaattorit-valikosta tai paina Ctrl+Shift+I.



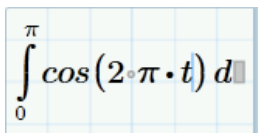
2. Lisää integroimisrajoiksi 0 ja π . Merkki π löytyy Pienet kreikkalaiset kirjaimet -listasta Symbolit-valikosta tai pikavalinnalla p ja Ctrl + g. Käytä tab-näppäintä liikkeessasi paikanvaraajasta toiseen.



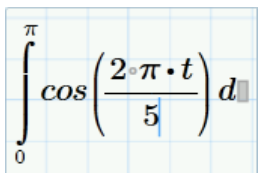
3. Lisää integroitavaksi kosinifunktio Kaikki Funktiot -valikosta, Funktiotvälilehdeltä tai kirjoita se normaalisti.



4. Syötä funktion argumentiksi $2 \cdot \pi \cdot t$.



5. Jaa se 5:llä.



6. Käytä oikeaa nuolinäppäintä päästäksesi kursorilla cos-funktion perään ja valitse kertomerkki Operaattorit-valikosta. Voit myös kirjoittaa * näppäimistöltä.

$$\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{5}\right) \cdot d$$

7. Lisää sinifunktio Kaikki Funktiot -valikosta, Funktiot-välilehdeltä tai kirjoita se itse.

$$\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{5}\right) \cdot \sin\left(\right) d$$

8. Syötä $2 \cdot \pi \cdot t$ ja jaa se luvulla 7.

$$\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{5}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{7}\right) d$$

9. Täytä viimeinen paikanvaraaja riippumattomalla muuttujalla t.

$$\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{5}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{7}\right) dt$$

10. Varmista, että olet alueen sisällä ja valitse ratkaisuoperaattori Operaattorit-valikosta tai paina = näppäimistöltä ratkaistaksesi integraalin.

$$\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2 \pi \cdot t}{5}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \pi \cdot t}{7}\right) dt = -0.769$$

Tehtäviä 2: Määritelmät

1. Tee seuraavat määritelmät ja ratkaise sitten kaikkien muuttujien arvot.

$$a := 5 \quad b := 10$$

$$c1 := a + b \quad c2 := \frac{a}{b} \quad c3 := a \cdot b \quad c4 := \frac{a}{b \cdot c1 + c2} + c3$$

2. Määrittele funktio $f(t) = t^2 - 25t + 4,5$ ja laske sen arvot $f(3,5)$ ja $f(0,5)$. Nimeä funktio funktioksi Nimiöstä. Huomaa myös, että ohjelma käyttää desimaalipilkkuna pistettä.

Matriisit ja arvoaluemuuttujat

Matriisit ja arvoaluemuuttujat määritellään samalla yleisellä tavalla kuin muuttujat ja funktiotkin. Muutama eroavaisuus näiden välillä on kuitenkin syytä huomioida.

Arvoaluemuuttujat

Arvoaluemuuttujat ovat, kuten nimikin jo kertoo, muuttujia, jotka saavat samalla kertaa arvokseen kokonaisen arvoalueen.

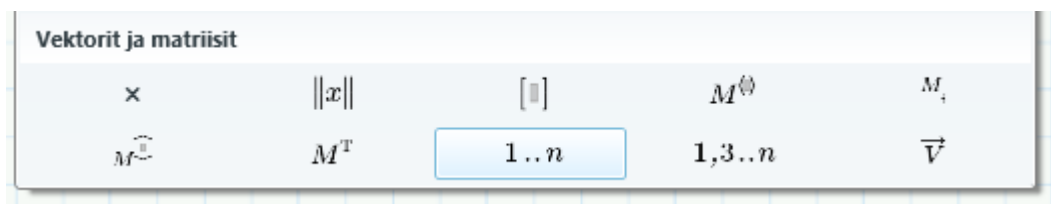
Arvoaluemuuttujaa määriteltäessä valitaan muuttujan nimi ja aloitetaan määrittely tavalliseen tapaan.

arvoalue := |

Seuraavaksi kirjoitetaan arvoalueen pienin arvo, joka olkoon tässä tapauksessa vaikkapa 1.

arvoalue := 1 |

Valitaan sitten arvoalueen ikoni **Operaattorit**-valikosta, Vektorit ja matriisit -listasta tai käytetään pikavalintaa .. (kaksi pistettä) arvoalueen määrittelyyn.



Kirjoitetaan vielä arvoalueen suurimmaksi arvoksi 3, jolloin arvoaluemuuttuja on valmis.

$$\text{arvoalue} := 1 \dots 3 \quad \longrightarrow \quad \text{arvoalue} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Arvoalueissa askelvälin oletusarvo on 1. Mikäli haluttu askelvälikin on 1, ei sarjan toista arvoa ole tarpeellista merkitä. Jos taas askelväli halutaan itse määritellä, kirjoitetaan arvoväliin sen toinen arvo ja erotetaan se pilkulla ensimmäisestä. Tässä esimerkiksi käytämme askelväliä 0,1.

arvoalue := 1,1..1

Lopuksi syötetään sarjan viimeinen arvo, olkoon se tässä vaikka 2.

arvoalue := 1,1..2

Askelvälillisellevä arvoalueelle löytyy myös ikoni Vektorit ja matriisit -listasta, tavallisen arvoalueen (oletusarvo 1) vierestä.

Arvoaluemuuttujien avulla voidaan suorittaa iteratiivisia laskelmia helposti ja selkeästi esitettynä.

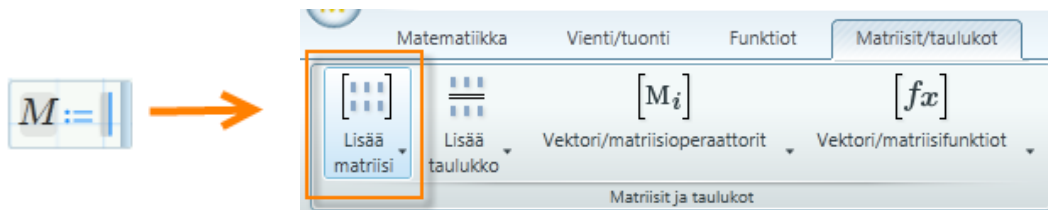
Mathcadin tulostaessa arvoaluemuuttujan sisältävän lausekkeen kutakin arvoaluemuuttujan arvoa vastaa yksi arvo.

Vastoin kuin taulukoissa, joita käsitellään seuraavaksi, yhteen tiettyyn arvoaluemuuttujan arvoon ei ole mahdollista päästä käsi.

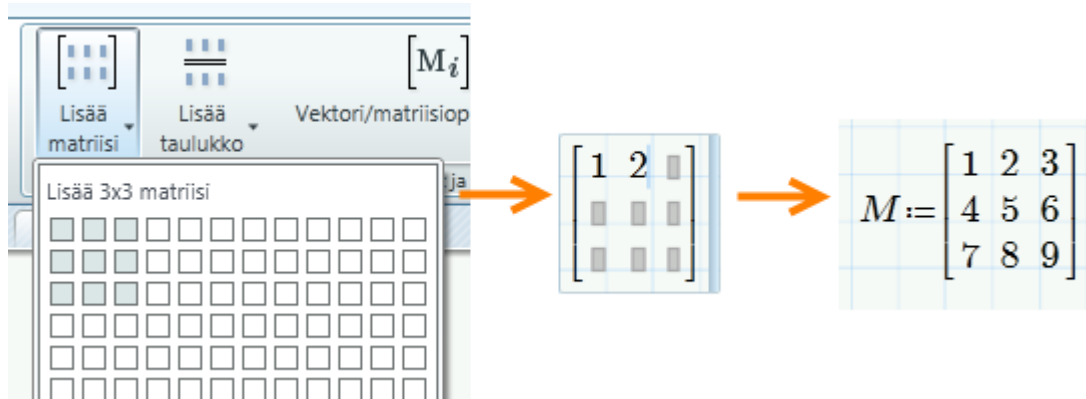
$$arvoalue = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \\ 1.5 \\ 1.6 \\ 1.7 \\ 1.8 \\ 1.9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matriisit

Helpoin tapa lisätä dokumenttiin matriisi lienee valita **Matriisit/taulukot**-välilehti ja sieltä **Lisää matriisi** -painike. Toisaalta tähän voidaan myös käyttää pikavalintaa **Ctrl + M**.



Mathcad pyytää seuraavaksi matriisin koon, joka voidaan määrittää vetämällä hiirtä. Tässä valitaan kooksi kolmirivinen ja kolmisarakkeinen matriisi.



Matriisin alkioden arvot voidaan lisätä näppäimistöltä. Alkioden välillä liikkua nuolinäppäimillä tai seuraavaan alkioon voidaan siirtyä tab-näppäimellä. Tämä lisää matriisiin rivin, kun kursori on matriisin viimeisessä alkiossa.

Taulukko

Toinen käytännöllinen tapa kirjoittaa tietoa dokumenttiin on syöttää se suoraan taulukkoon. Valitse **Matriisit/taulukot**-välilehdeltä **Lisää taulukko** -painike tai paina pikanäppäimiä **Ctrl+6**.

n	m
()	(kg)
1	0.501
2	1.342
3	1.407
4	2.421
5	2.929

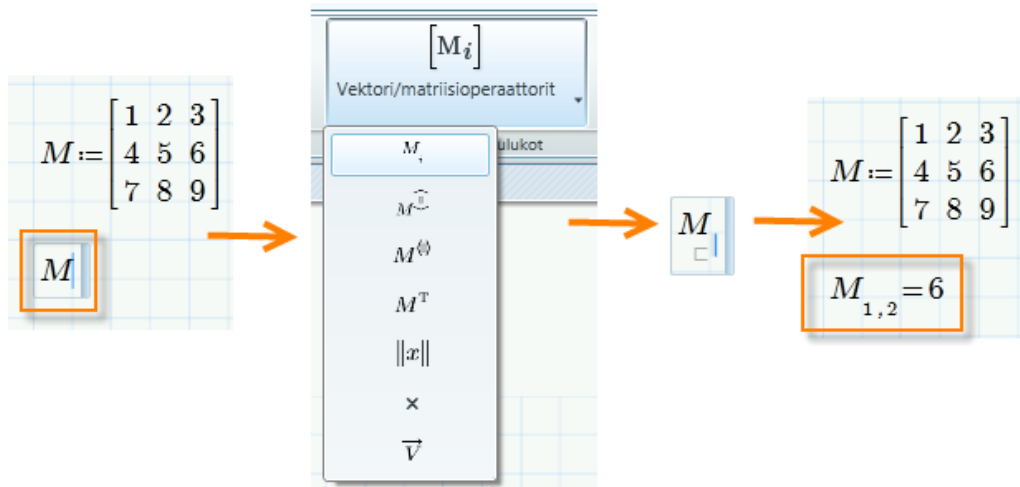
→

$n =$	$m =$	
1	0.501	
2	1.342	
3	1.407	
4	2.421	
5	2.929	kg

Kirjoita taulukon sarakkeiden nimet ensimmäiselle riville ja toiselle riville sarakkeiden yksiköt. Voit lisätä arvoja tai muuttaa taulukon kokoa samalla tavalla kuin matriisiin.

Matriisin alkion haku

Matriisin alkioon pääsee käsiksi indeksioperaattorilla, joka löytyy sekä Operaattorit-valikosta että **Vektori/matriisioperaattorit**-valikosta Matriisit/taulukot-välilehdeltä. Toinen vaihtoehto on käyttää pikavalintaa [(vasen hakasulku).

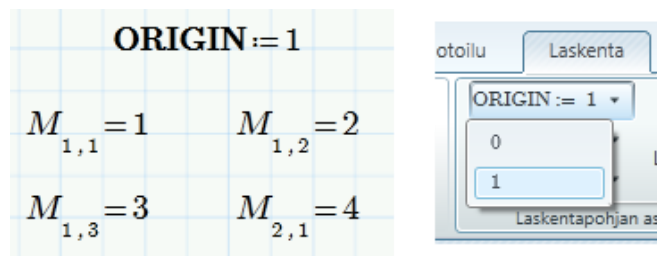


Syötä paikanvaraajan kohdalle alkion indeksi (rivi ja sarake numeroina pilkulla erotettuna). Vektoreiksi kutsutuissa yksisarakkeisissa matriiseissa sarakkeen numero ja pilkku voidaan jättää merkitsemättä.

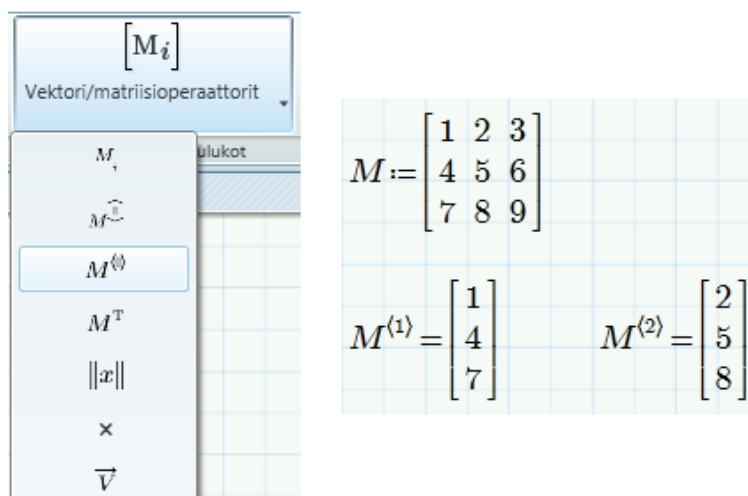
Huomaa, että oletusarvoisesti matriisin indeksointi lähtee nolasta. Voit muuttaa tätä asetusta seuraavilla tavoilla:

- Määrittele origo laskentapohjassa.
- Vaihda asetusta valitsemalla **Laskenta**-välilehdeltä **ORIGIN**-painike.

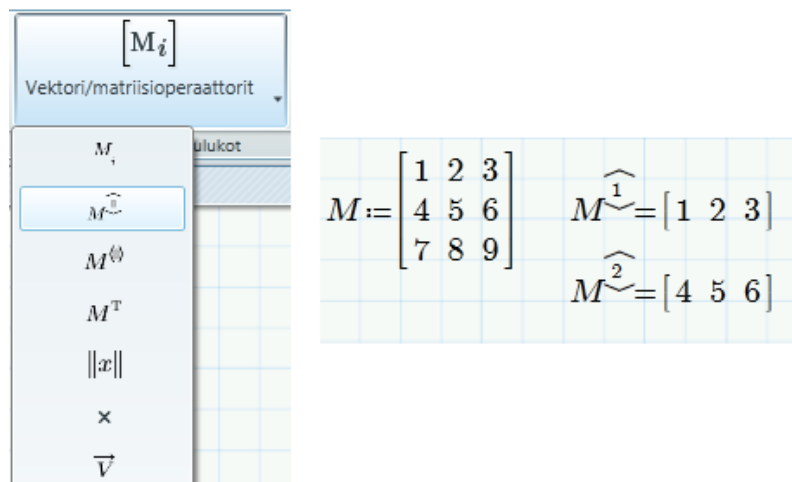
Tässä harjoituksessa käytämme aina jatkossa matriisin ORIGONA ykköistä eli matriisin ensimmäisen alkion indeksi on 1,1.



Kokonaisen sarakkeen haku tapahtuu sarakeoperaattorilla, joka löytyy kolmantena samasta valikosta kuin alkion indeksi. Sille voidaan käyttää myös pikavalintaa **Ctrl+Shift+C**.



Tietyn rivin haku taas tapahtuu vastaavasti rivioperaattorilla, jolloin tuloksena on vaakavektori. Rivioperaattorille voidaan käyttää pikanäppäintä **Ctrl+Shift+R**.



$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{M_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{M_2} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Riviä tai saraketta päästään muokkaamaan myös käyttämällä arvoaluemuuttujaa, kuten alla.

$$i := 1..3$$

$$rivi1_{1,i} := M_{1,i}$$

$$rivi1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$sar2_i := M_{i,2}$$

$$sar2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

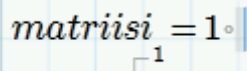
Määrittelee arvoaluemuuttujan joko rivien tai sarakkeiden mukaan.

Matriisin indeksi verrattuna tekstin alaindeksiin

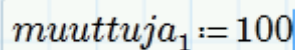
Tässä on syytä huomata tärkeä eroavaisuus. Opimme juuri *matriisin alaindeksoinnin*, jota käytetään viitattaessa tiettyyn matriisin alkioon. Mathcadissa on olemassa toisenlaisiakin alaindeksejä, *kirjaimen alaindeksejä*: tällöin indeksi kuuluu muuttujan nimeen.

Nämä kaksi alaindeksiä on mahdollista erottaa toisistaan vain valitsemalla alueen hiirellä. Matriisin alaindeksin tapauksessa indeksin eteen ilmestyy väkänä.

matriisin alaindeksi


$$matriisi = 1_{\square 1}$$

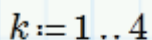
kirjaimen alaindeksi

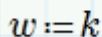

$$muuttuja_1 := 100$$

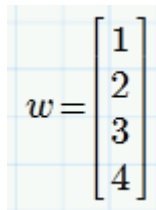
Matriisin täydentäminen arvoaluemuuttujan avulla

Arvoaluemuuttuja on käytännöllinen matriisin alkioden arvoja asetettaessa. Määrittele vain arvoaluemuuttuja, joka sisältää matriisin indeksit, ja aseta tämä yhtä suureksi matriisin funktion kanssa.

vektori

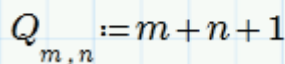

$$k := 1 .. 4$$

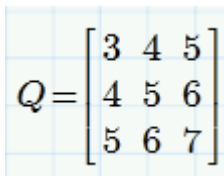

$$w := k$$


$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

matriisi


$$m := 1 .. 3 \quad n := 1 .. 3$$


$$Q_{m,n} := m + n + 1$$


$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Muita hyödyllisiä matriisioperaatioita

Vektori/matriisioperaattorit-valikko sisältää myös matriisin transpoosin ja determinantin

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad M^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \|M\| = 25$$

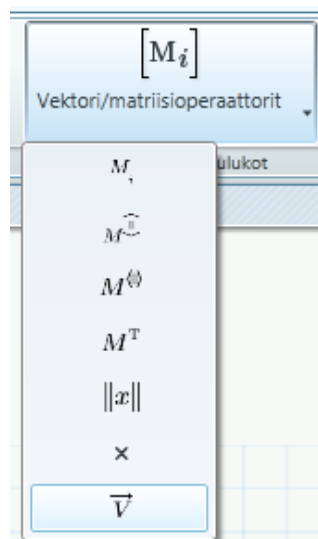
kuten myös kahden matriisin piste- ja ristitulon.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 32 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Huomaat, että kerrottaessa keskenään kaksi $n \times 1$ -matriisia, Mathcad olettaa, että lasketaan pistetuloa ja palauttaa skalaarin tuloksen: $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$.

Mitä jos halutaan Mathcadin palauttavan $n \times 1$ -matriisi?

Mathcadista löytyy tähän tarkoitukseen luotu toiminto, **Vektorisointi**.



$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Vektorisointi on kätevä silloin, kun halutaan luoda kullekin alkioille erikseen oma operaattori tai funktio.

The screenshot shows a Mathcad worksheet with a light blue grid background. At the top, a matrix M is defined as $M := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Below this, the expression $\sin(M)$ is entered, with the M enclosed in a red box. A tooltip box appears, displaying $\sin(M) = ?$ and a red message: "Tämän arvon on oltava vektori." (This value must be a vector). At the bottom, the result of the vectorized sine function is shown as $\overrightarrow{\sin(M)} = \begin{bmatrix} 0.841 & 0.909 \\ 0.141 & -0.757 \end{bmatrix}$.

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$\sin(M) = ?$

Tämän arvon on oltava vektori.

$$\overrightarrow{\sin(M)} = \begin{bmatrix} 0.841 & 0.909 \\ 0.141 & -0.757 \end{bmatrix}$$

Vaihe vaiheelta 3

Harjoitus 1

Tässä harjoituksessa määrittelemme 3×3 -matriisin M , jonka alkiot vastaavat indeksiansä summaa.

Ennen kuin aloitat, varmista, että origo (ORIGIN) on asetettu ykköseksi tätä harjoitusta varten.

1. Aloita määrittelemällä kaksi arvoaluemuuttujaa – toinen rivejä ja toinen sarakkeita varten. Kirjoita i ja sitten määritelmä.

2. Syötä lähtöarvo 1 paikanvaraajaan.

3. Valitse sitten arvoaluemuuttajan operaattori Operaattorit-valikosta. Voit myös kirjoittaa .. (kaksi pistettä).

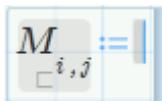
4. Syötä arvoalueen viimeinen arvo. Koska tämä on 3×3 -matriisi, syötä 3.

5. Toista vaiheet 1 – 4 ja määrittele arvoaluemuuttujalle j sama arvoalue.

6. Kirjoita M ja sitten valitse matriisin indeksioperaattori Vektori/matriisioperaattorit-valikosta. Voit myös näppäillä [.

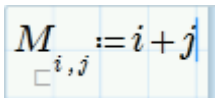
7. Syötä rivejä kuvaavan arvoaluemuuttujan nimi, sitten pilkku ja toisen, sarakkeita vastaavan muuttujan nimi alaindeksipaikanvaraajaan.

8. Kirjoita määritelmän merkki.



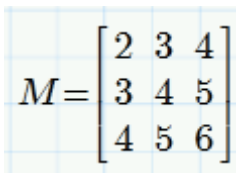
$$M_{i,j} :=$$

9. Syötä paikanvaraajaan indeksien summa, joka on siis $i + j$.



$$M_{i,j} := i + j$$

10. Nähdäksesi matriisin M, kirjoita M ja yhtäsuuruusmerkki =.

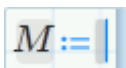


$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Harjoitus 2

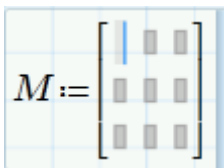
Ensimmäisen harjoituksen kanssa samaan tulokseen päästään täyttämällä alkiot matriisille M manuaalisesti.

1. Kirjoita M ja määritelmän merkki.



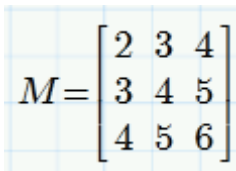
$$M :=$$

2. Lisää matriisi Matriisit/taulukot-välilehdeltä tai valitse Ctrl + M näppäimistöltä. Määritä matriisin kooksi 3 x 3.



$$M := \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

3. Täytä paikanvaraajat indeksien summilla. Käytä tabulaattoria tai nuolinäppäimiä liikkuaaksesi paikanvaraajasta toiseen.



$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Tehtäviä 3: Matriisit ja arvoaluemuuttujat

1. Luo muuttuja y , joka juoksee 0:sta 0,1:een 0,01 välein.
2. Määrittele matriisi N , joka on kooltaan 50×50 . Käytä matriisin luomiseen kahta arvoaluemuuttujaa m ja n . Varmista, että $\text{ORIGIN} := 1$.
 - (a) Poimi matriisista N kunkin kulman alkio.
 - (b) Poimi matriisin N 30. sarake ja muodosta siitä uusi muuttuja u .
 - (c) Käytä arvoaluemuuttujaa saadaksesi matriisista 5. rivi. Muodosta siitä uusi muuttuja w . Varmista, että w on rivi eikä sarake.
 - (d) Toista nyt c-kohta käyttäen transpoosi- ja sarakeoperaattoreita Vektori/matriisioperaattorit-valikosta.
 - (e) Laske muuttujien u ja w^T skalaaritulo (pistetulo).
 - (f) Käytä Vektorisointi-operaattoria ja laske kullekin u :n ja w^T :n alkion tulo.
3. Määrittele nelialkioinen vektori v , jossa alkioiden arvot ovat 1, 3, 5 ja 7.
 - (a) Määritellen alkiot yksitellen vektorin alaindeksiä käyttäen. Ratkaise v .
 - (b) Määritellen alkiot arvoaluemuuttujan i avulla.
 - (c) Määrittele vektori p_i , jonka alkiot ovat $2 \cdot i + \sqrt{5}$, jossa i on määritelty b-kohdassa. Ratkaise p .
 - (d) Ratkaise vektori v vaakavektorina.

Käytä vektoreiden ja matriisien funktioita ja määritä vektorin v

- (e) rivien määrä
- (f) sarakkeiden määrä
- (g) pituus (itseisarvo-operaattori)
- (h) alkoiden lukumäärä
- (i) viimeisen alkion indeksi
- (j) suurimman alkion arvo

4. Matriisi A on seuraavanlainen:

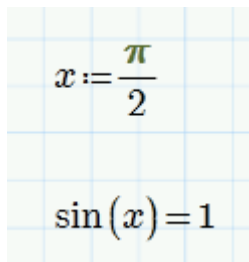
$$A := \begin{bmatrix} 4 & 5 & 89 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 654 & 65 & 87 \\ 68 & 7 & 53 & 31 & 1 \\ 8 & 6 & 8 & 65 & 15 \end{bmatrix}$$

- (a) Määritä matriisin A suurin alkio.
- (b) Määritä matriisin A determinantti.
- (c) Määritä matriisin A transpoosi.
- (d) Poimi vektoriksi matriisista A kaksi saraketta ja laske niiden pistetulo.
- (e) Määritä matriisin A käänteismatriisi.
- (f) Määritä matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit.

Laskeminen dokumentilla

Alueriippuvuus

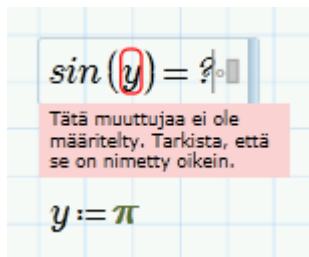
Mathcad lukee matemaattisia alueita, kuten kirjaa – ylhäältä alas ja vasemmalta oikealle. Tämä ominaisuus kannattaa painaa mieleen dokumentilla edettäessä. Alla on aiheesta esimerkki:



$$x := \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(x) = 1$$

Mathcad pystyy ilmaisemaan lukuna funktion $\sin(x)$, koska x määriteltiin edellä. Mikäli x :n määritelmä olisi sijoitettu vasta funktion $\sin(x)$ jälkeen, Mathcad ilmoittaisi virheestä, koska x :n arvo ei olisi vielä tiedossa funktion $\sin(x)$ arvoa laskettaessa. Alla on aiheesta esimerkki:



$$\sin(y) = ?$$

Tätä muuttujaa ei ole määritelty. Tarkista, että se on nimetty oikein.

$$y := \pi$$

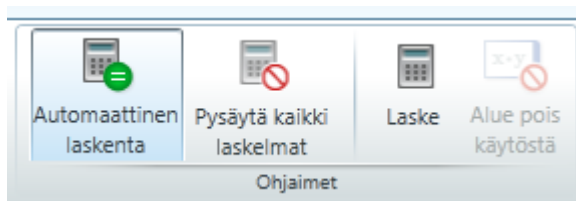
Määritelmät vaikuttavat kaikkeen, mitä syötetään niiden oikealle tai alapuolelle. Näin ollen myös kaikki määritelmää seuraavat tulokset päivittyvät, mikäli määritelmää muutetaan.

Laskeminen dokumentilla

Mathcadin oletusasetuksien perusteella ohjelma ratkaisee laskentapohjaan syötetyt laskut automaattisesti. Yleensä haluamme, että tekemämme muutokset päivittyvät myös muutettua kohtaa seuraaviin tuloksiin ja kuvaajiin. Tämän toiminnon merkitys käy hyvin ilmi parametrin arvoa muutettaessa.

On kuitenkin tilanteita, jolloin emme halua dokumenttimme päivittyvän automaattisesti. Mikäli ollaan esimerkiksi luomassa monimutkaista kuvaajaa, jonka päivittyminen kestää useita sekunteja, emme ehkä halua, että Mathcad lataa jatkuvasti kuvaa uudelleen jonkun yllä olevan parametrin muuttuessa.

Automaattista laskemista voidaan säädellä **Laskenta**-välilehdeltä.



Automaattisen laskemisen voidaan ottaa pois päältä klikkaamalla *Pysäytä kaikki laskelmat* -painiketta. Matemaattisten alueiden muokkaaminen ei tällöin muuta lopputuloksia.

Yksittäisiä matemaattisia alueita voidaan poistaa käytöstä, mikäli käyttäjä ei halua, että ne vaikuttavat muihin laskelmiin. Tämä on erityisen hyödyllistä silloin, kun jonkin alueen laskenta vie muita enemmän aikaa, mutta muut alueet halutaan pitää automaattilaskennassa. Alue voidaan ottaa pois käytöstä valitsemalla ensin alue ja sitten klikkaamalla *Alue pois käytöstä* -painiketta.

$$x := 1$$
$$\sin(x) = 1.225 \cdot 10^{-16}$$
$$\cos(x) = 0.54$$

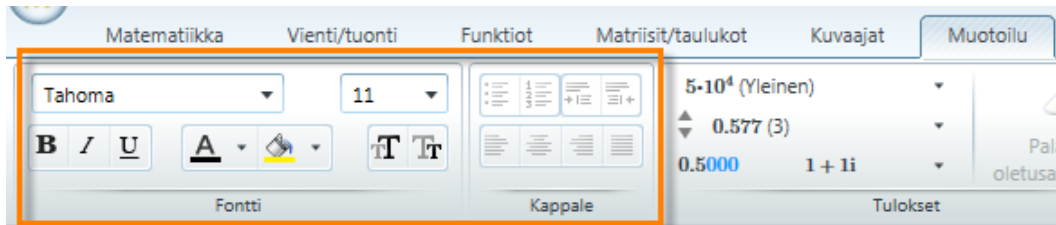
Alueet, joihin automaattinen laskenta ei vaikuta, näkyvät laskentapohjassa himmeinä. Alueet saadaan takaisin käyttöön klikkaamalla uudelleen *Alue pois käytöstä* -painiketta.

Muotoilu ja dokumentointi

Tekstialueen muotoileminen

Eräs Mathcadin houkuttelevimmista ominaisuuksista on sen lukuisat muokkausvalinnat. Suunnittelussa sekä yliopistokäytössä tietokoneohjelmalta vaaditaan usein yhtenäistä matemaattista merkintätapaa, tulosten tarkkuutta sekä tekstin muokkausominaisuuksia. Järjestelmällisyyden sekä selkeyden ansiosta dokumentti on myös ymmärrettävämpi. Usein yhtenäistä merkintätapaa halutaan käyttää sekä matematiikkaa että tekstiä kirjoitettaessa, mikä on otettava ohjelman ominaisuuksia suunniteltaessa huomioon. Asiakasprojekteissa työskentelevällä saattaa usein olla valmis standardi Mathcadin dokumentti, jonka ylä- ja alamarginaalissa on yrityksen logo ja muuta tarpeellista tietoa yrityksestä.

Mathcad antaa käyttäjälle mahdollisuuden *muokata* itse omat tekstiasetuksensa (haluttaessa käyttää esimerkiksi tummansinistä tekstiä, joka on kooltaan 16 pistettä sekä fontiltaan Times New Roman). Alettaessa kirjoittaa tekstialueelle tekstiä Mathcadin tekstityypin oletusasetuksena on väriltään musta, kooltaan 11 ja fontiltaan Tahoma; tätä asetusta voi muuttaa valitsemalla **Muotoilu**-välilehden **Fontti**-ryhmästä. Tehdyt muutokset vaikuttavat koko dokumenttiin. Voit siis työstää valmiiksi koko dokumentin, minkä jälkeen oletusasetustyylin muokkaaminen muuttaa kerralla tekstityylin koko dokumentissa.



Käytössä olevaa tekstityyliä voidaan muokata, tai sitten voidaan luoda kokonaan uusi tekstityyli. Lisäksi muutoksia tekstityyliin voidaan toteuttaa paikallisesti, mikäli käyttäjä haluaa esimerkiksi vain yhden sanan näkyvän **lihavoituna**. Tämänkaltaisia yksittäisiä muutoksia tehtäessä maalataan haluttu tekstinpätkä ja valitaan Fontti-ryhmästä haluttu muotoilu.

Huom. On tärkeää pitää mielessä, että nämä paikalliset asetukset eivät muutu dokumentin tyyliä muutettaessa.

Kappale-ryhmän työkalujen avulla on mahdollista keskittää sekä tasata teksti vasemmalle tai oikealle. Luetteloita varten on mahdollista valita luettelomerkit ja numerointi.

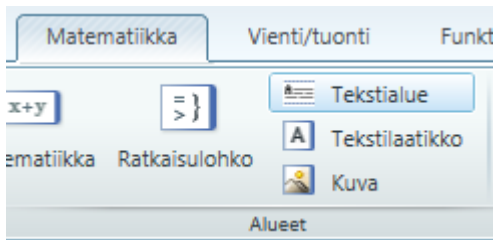
- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none">• Luettelomerkit näyttävät tältä• Ne on helppo lisätä työkirjaan | <ol style="list-style-type: none">1. Luetteloiden numerointi näyttää tältä2. Nekin on varsin helppo lisätä työkirjaan |
|---|--|

Vaihe vaiheelta 4

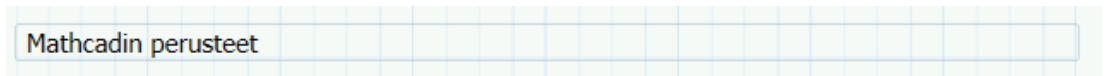
Harjoitus 1

Tässä harjoituksessa tutustutaan Mathcadin tekstialueeseen ja sen muotoiluun.

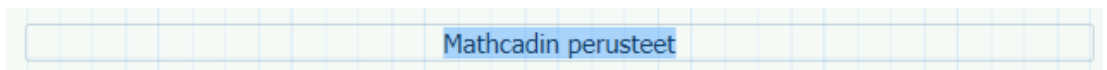
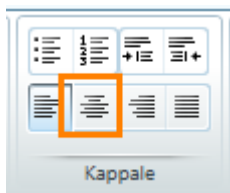
1. Pidä sininen risti laskentapohjan yläreunassa ja lisää **Matematiikka-välilehdeltä** tekstialue tai paina **Ctrl+Shift+T**.



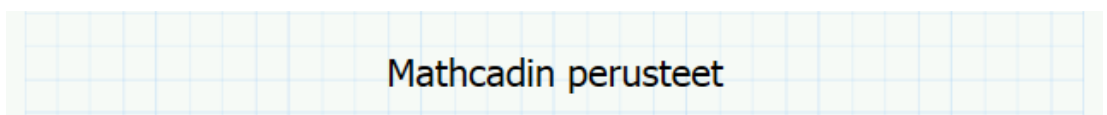
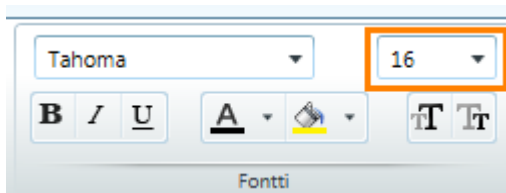
2. Kirjoita alueeseen dokumentin otsikko *Mathcadin perusteet*.



3. Maalaa teksti ja keskitä se **Muotoilu-välilehden Kappaleet-ryhmästä**.

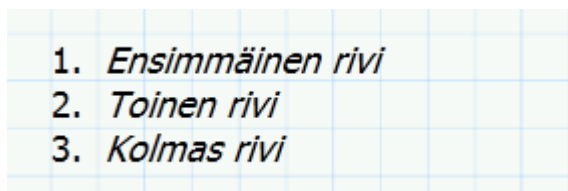


4. Aseta tekstin fontiksi 16 **Fontti-ryhmästä**.



Tehtäviä 4: Muotoilu ja dokumentointi

1. Muodosta seuraavanlainen luettelo:

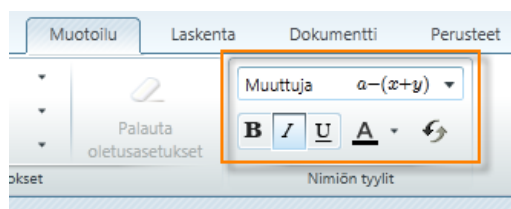
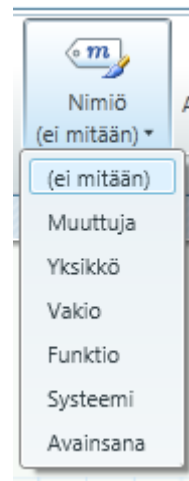


Matemaattisten alueiden muotoileminen

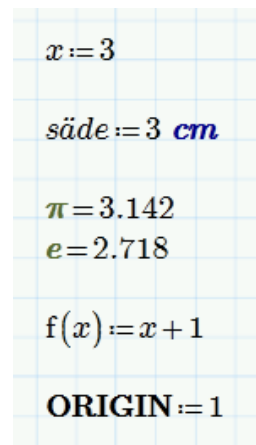
Seuraavaksi käsitellään matemaattisten alueiden muokkausmahdollisuuksia, kuten Nimiön tyyliä sekä tulosten näytön valintoja.

Nimiöstä matemaattinen lauseke voi saada seuraavat määritelmät: muuttuja, yksikkö, vakio, funktio, systeemi ja avainsana. Näiden ulkoasua voidaan muokata **Muotoilu**-välilehden **Nimiön tyyli** -ryhmästä.

Mathcadissa on mahdollista muokata kaikkia laskentapohjassa esiintyviä muuttujia ja vakioita. Kaikki yhtälöt voidaan kerralla muokata esimerkiksi siten, että muuttujat näkyvät sinisinä ja vakiot punaisina. Yhtälöiden ulkoasu jää käyttäjän päätettäväksi. Alla on esitetty Nimiön tyyli -ryhmä ja oletustyyli, jotka voidaan aina palauttaa *Palauta oletusasetukset* -painikkeesta.



Huom. Valitsemalla tyylin tehdyt muutokset vaikuttavat koko dokumenttiin. Paikallisia muutoksia ei voi tehdä yksittäiselle alueelle.

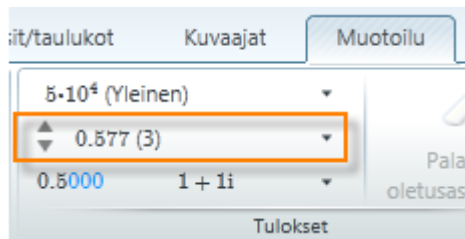


Numeeristen tulosten muotoilu

Mathcad pystyy käsittelemään lukuja 15 desimaalin tarkkuudella. Luettavuuden kannalta Mathcad näyttää oletusarvoisesti tuloksissa vain 3 desimaalia. Tarkastellaanpa ennalta määriteltä vakiota π . Alla se on esitetty kolmen desimaalin tarkkuudella.

$$\pi = 3.142$$

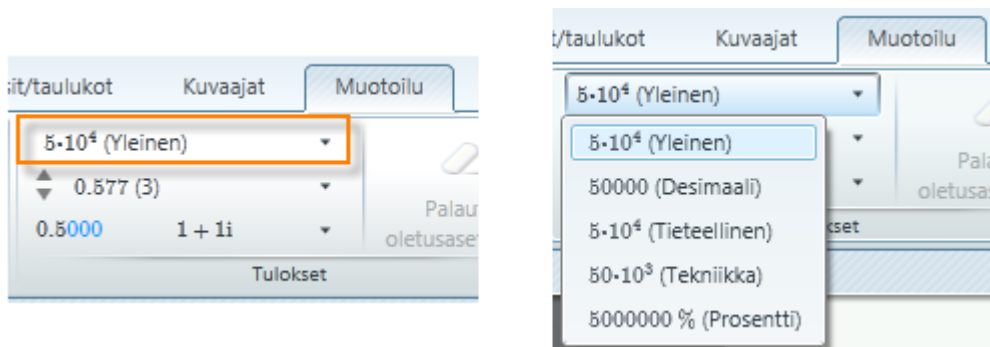
Mathcadin alkuasetuksia voidaan kuitenkin muuttaa siten, että luvut näytetään joko aina tai tapauskohtaisesti suuremmalla tarkkuudella. Valitse vakiota π vastaava matemaattinen alue ja valitse sitten **Muotoilu**-välilehden **Tulokset**-ryhmästä **Esitystarkkuus**-lista.



Jotta Mathcad esittäisi π :n suurimmalla mahdollisella tarkkuudella, valitse listasta luku 15. Jos taas klikataan laskentapohjaa ja määritetään esitystarkkuus, Mathcad käyttää tätä esitystarkkuutta koko laskentapohjassa.

$$\pi = 3.14159265358979$$

Mathcadissä käytössäsi on laaja valikoima lukujen esitystapojen ominaisuuksia. Seuraavassa käsittelemme kutakin ominaisuutta vuorotellen.



Yleinen-valinnalla voidaan esittää luku kymmenen potensseina. Tulos esitetään eksponentiaalimuodossa eksponentiaalisen kynnyksen ylittyessä. Kynnyksen oletusasetus on 3 (vastaa $10^3 = 1000$). Tällöin tulokset, jotka ovat pienempiä kuin 1000, eivät muunnu kymmenen potensseiksi.

$$1000.96 = 1.00096 \times 10^3$$

eksponentiaalinen esitystapa

Desimaali-valinnalla tulos näkyy aina desimaalimuodossa. Desimaalien määrä voi muuttaa Esitystarkkuus-listasta.

$$1000.96 = 1000.96$$

desimaalimuodossa

Valinnat **Tieteellinen** ja **Tekniikka** muistuttavat hieman Yleinen-valintaa. Näissä tulokset ovat kuitenkin aina eksponenttimuodossa. Lisäksi **Tekniikka**-muodossa eksponentit näytetään aina kolmen monikertoina.

$$10000.96 = 1.000096 \times 10^4$$

Tieteellinen-esitystapa

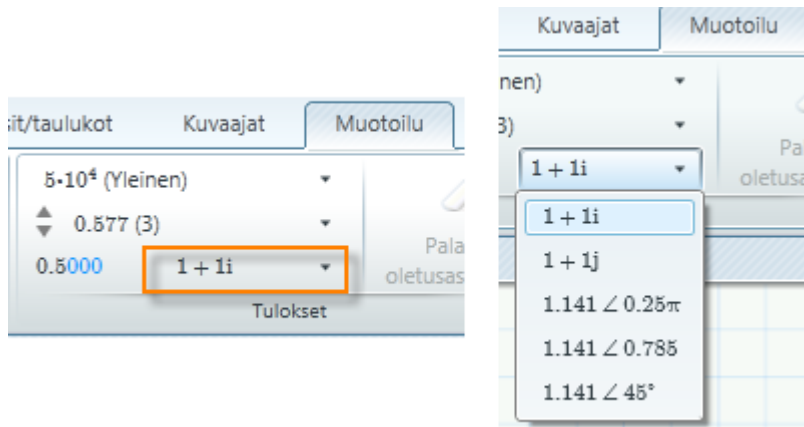
$$10000.96 = 10.00096 \times 10^3$$

Tekniikka-esitystapa

Valittaessa **Prosentti**-muoto tulos esitetään puolestaan prosenttilukuna eli ne jaetaan luvulla 100.

Kompleksiluvut

Luonnontieteissä käytetään vaihtelevia merkintätapoja imaginääriluvuille. Matemaatikot käyttävät mielellään merkintää $i = \sqrt{-1}$, kun taas osa fyysikoista suosii tapaa $j = \sqrt{-1}$. Mathcad soveltaa molempia tapoja. Tätä asetusta voi muuttaa valitsemalla **Muotoilu**-välilehden **Tulokset**-ryhmästä.



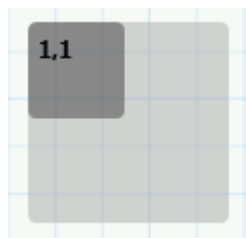
Matriisien esitystapa

Käsittelimme aiemmin matriisien määrittelemistä Mathcadissa. Oletusarvoisesti Mathcad esittää pienet matriisit (alle 12 riviä ja saraketta) sulkujen sisällä matriisimuodossa. Suuremmista matriiseista on, ilmeisistä syistä johtuen, piilotettu osa. Käyttäjä voi vierityspalkkien avulla tarkastella matriisin alkioita tuhlaamatta työskentelytilaa.

$$\text{identity}(25) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

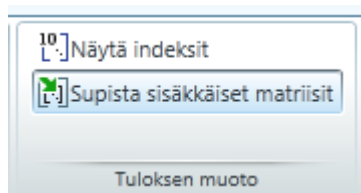
Tässä Mathcad näyttää 25 x 25 -identiteettimatriisin, kun $\text{ORIGIN} := 1$.

Esitystapaa voidaan muuttaa klikkaamalla oikeassa alakulmassa olevia kolmea pistettä, jolloin *Matriisin navigointi* -ikkuna avautuu.



Tummanharmaa alue esittää sitä matriisin osaa, joka näytetään, kun taas vaaleanharmaa alue koko matriisia. Näytettävän matriisin kokoa voidaan muuttaa vetämällä hiirellä tummanharmaan alueen reunoista.

Matriisin esitystapaa voidaan muokata myös **Matriisit/taulukot** -välilehden **Tuloksen muoto** -ryhmästä.



Kun *Näytä indeksi* on valittuna, matriisin rivien ja sarakkeiden numerot jäävät näkyviin, vaikka klikattaisiin laskentapohjaa matriisin ulkopuolelta.

Kun taas *Supista sisäkkäiset matriisit* on valittuna, näytetään matriisien sisällä olevista matriiseista vain niiden koko. Alla on tästä esimerkki.

Supistetussa muodossa

$$M = \begin{bmatrix} 1 & [2 \times 2] & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Kokonaisena

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.35 \\ 0.25 & 1.7 \end{bmatrix} & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Symbolisten laskujen tulosten esitystapa

Kuten numeeristen arvojen, myös symbolien tulostustarkkuus on käyttäjän määriteltävissä. Toisin kuin numeroita, symboleita Mathcad tallentaa 4000 desimaalin tarkkuudella.

Muuttuvia symboleja sisältävän yhtälön (yhtälöt, jotka päivittyvät muutoksia tehtäessä) tuloksessa esitettävän desimaalimäärän hallintaan käytetään liukuluvun float-avainsanaa. Muuttuvia symboleita sisältävissä tuloksissa on mahdollista näyttää 250 merkkiä. Verrataan tätä aiemmin esitettyyn π :n normaaliin tulostukseen, jolloin desimaaleja voitiin näyttää vain 15.

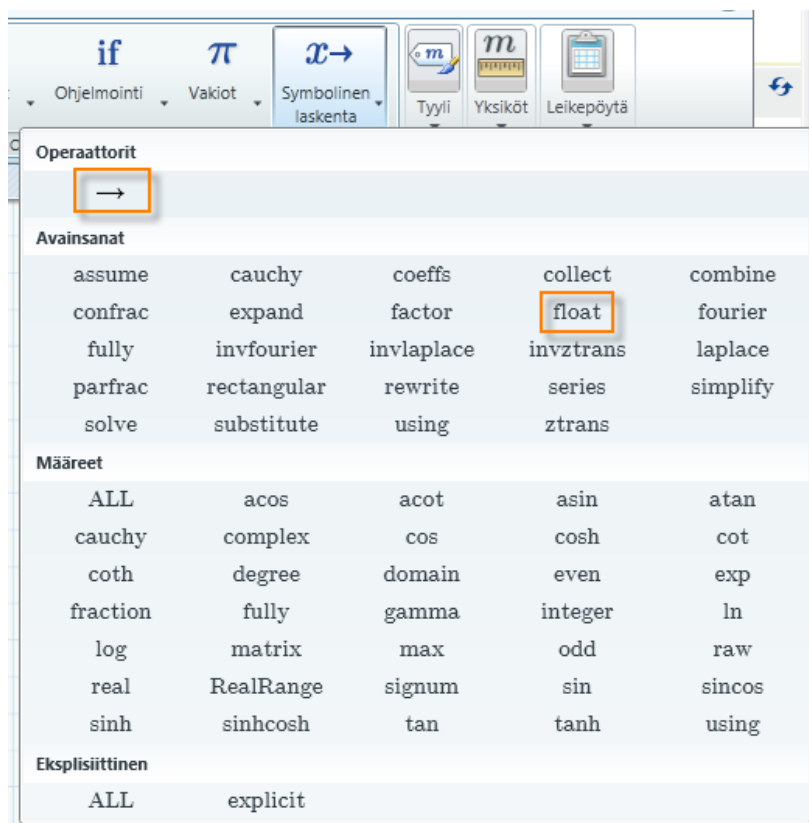
$$\pi = 3.14159265358979$$

Lisätään ensin Symbolinen ratkaisuoperaattori **Operaattorit-** tai **Symbolinen laskenta** -valikosta ja sitten float-avainsana **Symbolinen laskenta** -valikosta **Matematiikka**-välilehdeltä. Kirjoitetaan haluttu desimaalien määrä paikanvaraajaan ja painetaan Enter.

$$\pi \xrightarrow{\text{float}, 15} 3.14159265358979$$

$$\pi \xrightarrow{\text{float}, 25} 3.141592653589793238462643$$

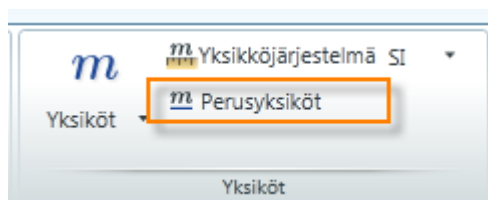
Huom. Liukulukuna ilmaistavien symbolien yhtäsuuruusmerkki osoitetaan oikealle suuntautuvalla nuolella $\rightarrow$. Näin ollen ohjelma osaa tulkita, miten tulos esitetään. Tarkemmin symbolista laskentaa käsitellään myöhemmin.



Yksiköt

Mathcad osaa tunnistaa sekä yksinkertaistaa, mikäli mahdollista, laskelmien tulokset yksiköitä myöten. Käyttäjä voi lisäksi muotoilla itse yksiköt näkymään haluamassaan muodossa. Asetuksia voidaan muuttaa **Matematiikka**-välilehden

Yksiköt-ryhmästä. Kun *Perusyksiköt* on valittu, Mathcad ei sievennä laskentapohjassa olevia yksiköitä. Kun taas *Perusyksiköitä* ei ole valittu, Mathcad sieventää yksiköt. Haluttu esitystapa voidaan asettaa koskemaan vain koko dokumenttia.



$$b := 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

Muuttuja b on määritelty yksiköitä käyttäen

$$b := 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

Ei sievennetty / Perusyksiköt valittuna.

$$b = 1 \text{ N}$$

Sievennetty / Perusyksikköjä ei ole valittu.

Vaihe vaiheelta 5

Harjoitus 1

Tässä harjoituksessa luomme sisäkkäisiä matriiseja ja harjoittelemme lisää matriisin alkioiden hakua.

1. Määrittele kaksi 2×2 -matriisia P ja Q määritelmän merkkiä ja Lisää Matriisi -valintaa käyttäen.

$$P := \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \quad Q := \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

2. Syötä matriisille P arvot 1, 2, 3 ja 4 sekä matriisille Q arvot 5, 6, 7 ja 8. Siirry paikanvaraajien välillä tab- tai nuolinäppäimen avulla.

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad Q := \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

3. Tallenna P ja Q 2×1 -matriisiin N.

$$N := \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$$

4. Tulosta N kirjoittamalla N =.

$$N = \begin{bmatrix} [2 \times 2] \\ [2 \times 2] \end{bmatrix}$$

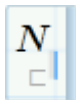
5. Klikkaa tulosta, jotta matemaattinen alue on varmasti valittu. Ota Matriisit/taulukot-välilehdeltä Supista sisäkkäiset matriisit -valinta pois, jolloin matriisin sisällä olevat matriisit näkyvät kokonaan.



The screenshot shows a Mathcad window with a checkbox labeled "Supista sisäkkäiset matriisit" (Suppress nested matrices) which is unchecked. An orange arrow points from this checkbox to a matrix N. The matrix N is displayed as:

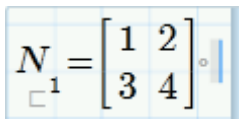
$$N = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

6. Tulostaaksesi sisäiset matriisit kirjoita N ja valitse matriisin alaindeksi Matriisi-työkaluriviltä tai kirjoita [.

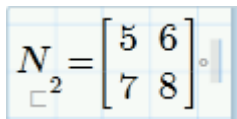


$$N_{\square 1}$$

7. Syötä 1 tai 2 tulostaaksesi matriisin P tai Q. Kirjoita = nähdäksesi tuloksen. Huomaa, että tässä ORIGIN := 1.



$$N_{\square 1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$



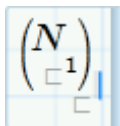
$$N_{\square 2} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

8. Nähdäksesi yksittäisen alkion, vaikkapa luvun 3, kirjoita N ja alaindeksiksi matriisia P vastaava rivin indeksi, joka on 1.



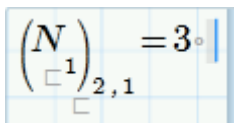
$$N_{\square 1}$$

9. Käytä välilyöntiä valitaksesi kursorilla koko muuttujan, ja syötä sitten jälleen matriisin alaindeksi kirjoittamalla [.



$$\left(N_{\square 1} \right)_{\square}$$

10. Syötä halutun alkion indeksi. Tässä tapauksessa numero 3 sijaitsee rivillä 2 sarakkeessa 1. Näin ollen syötä alaindeksin paikanvaraajaan 2, 1. Kirjoita = tulostaaksesi alkion.



$$\left(N_{\square 1} \right)_{2,1} = 3$$

Tehtäviä 5: Tulosten ja matriisien esitystavat

1. Aseta tässä tehtävässä ORIGIN := 1.

(a) Määrittele matriisit M ja N .

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad N := \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

(b) Laske matriisit M ja N yhteen.

(c) Luo matriisi P , joka koostuu matriiseista M ja N . Ratkaise P .

(d) Esitä matriisi P siten, että sen sisällä olevat matriisit M ja N näkyvät kokonaan.

(e) Erottele matriisista P sen alemman matriisin alkio 2,3.

(f) Muuta matriisin N alkion 1,2 arvoksi 0. Ratkaise N .

(g) Määrittele vektoriksi v matriisin M toinen rivi. Ratkaise v .

(h) Määrittele vektorin u alkioiksi 1, 2 ja 3. Laske vektoreiden u ja v piste- ja ristitulo.

(i) Määritä 3×2 -matriisi O ja anna sen arvoiksi -1,1,-1,1,-1,1. Laske matriisien M ja O tulo.

2. Ratkaise integraali. Näytä tulos kuuden desimaalin tarkkuudella.

$$\int_e^{3e} \frac{\ln(x)}{x} dx$$

3. Valitse **Vakiot**-valikosta Boltzmannin vakio k .

$$k = (1.381 \cdot 10^{-23}) \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}}$$

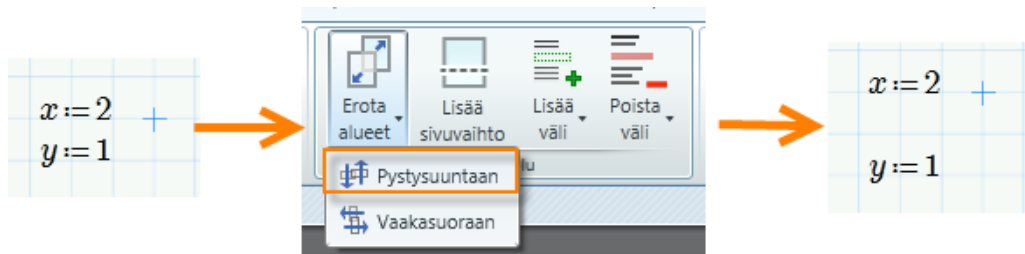
(a) Näytä vakio viiden desimaalin tarkkuudella.

(b) Tarkastele sitten, miten vakion *Tieteellinen*- ja *Tekniikka*-esitystavat eroavat toisistaan.

Dokumentin järjestäminen ja muokkaaminen

Alueiden erittely ja siirtäminen

Alueiden tasaustoimintojen avulla dokumentista saadaan ulkoasultaan selkeämpi. Jos esimerkiksi alueet ovat päällekkäin dokumentillasi, ne voidaan erottaa toisistaan varsin helposti. Vie ensin sininen risti alueiden väliin, kuten alla olevassa kuvassa. Valitse sitten **Dokumentti**-välilehdeltä **Erota alueet** -listasta **Pystysuuntaan** tai paina Ctrl+F3. Alueet liikkuvat kauemmaksi toisistaan. Toiminto voidaan kumota tutulla pikanäppäimellä Ctrl+z.

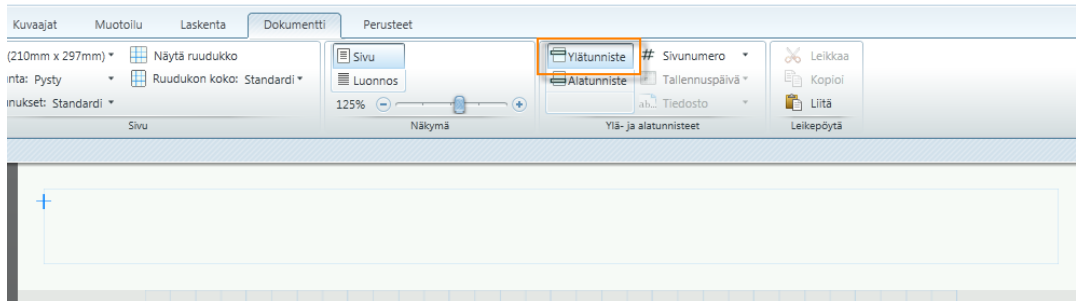


Lisää väli ja **Poista väli** -painikkeet toimivat samalla tavalla. Alueita ei siis tarvitse valita, vaan kursorin siirtäminen alueiden väliin riittää. Alueiden erittelyyn ja siirtämiseen voidaan käyttää myös pikanäppäimiä Enter ja Delete tai alueita voidaan siirrellä raahaamalla aluetta hiirellä reunoista.

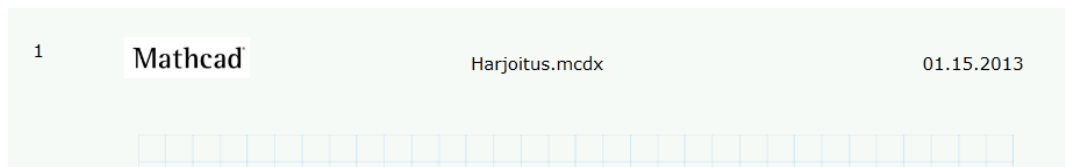
Ylä- ja alatunnisteet

Eräs tärkeä dokumentin muokkaustoiminto on ylä- ja alatunnisteiden lisäämismahdollisuus. Dokumenttiin voidaan lisätä yrityksen logo tai muuta yrityksen kannalta tärkeää tietoa. Dokumenttiin voidaan lisätä myös sivunumerointi.

Valitse **Dokumentti**-välilehdeltä **Ylä- ja alatunnisteet** -ryhmästä **Ylä- ja alatunniste** -painike, jolloin laskentapohjan yläreunaan ilmestyy ruutu.



Ylätunnisteeseen voidaan lisätä sivunumerot, tiedoston tallennuspäivä ja nimi Ylätunniste-painikkeen oikealta puolelta. Lisäksi välilehden vasemmasta reunasta, **Alueet**-ryhmästä voidaan lisätä tunnisteeseen tekstiä tai kuvia. Kun ylätunniste on valmis, painetaan vielä uudelleen **Ylätunniste**-painiketta, jolloin alue ei ole enää aktiivinen. Lopputulos saattaisi esimerkiksi näyttää tältä:



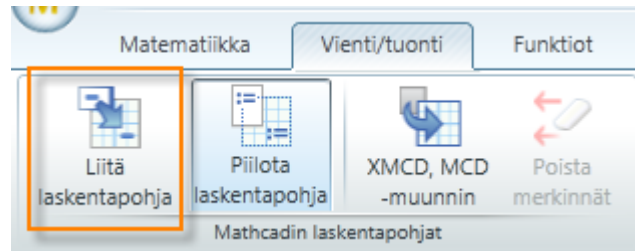
Vasemmalta oikealle luettaessa yllä olevassa kuvassa ovat sivunumero, ohjelman logo (kuva), tiedoston nimi ja viimeisin tallennuspäivä.

Ylätunnisteessa alueita voi siirrellä samalla tavalla kuin muitakin laskentapohjan alueita. Alatunniste lisätään samalla tavalla kuin ylätunniste.

Viittaukset

Halutessasi asettaa linkin toiseen dokumenttiin sekä aktivoida sen laskelmat alkuperäisessä ikkunassa, on käytettävä viittausta. Viittaukset muihin dokumentteihin toimivat samoin kuin muuttujien ja funktioiden määrittely: kaikki viitatus sivun laskelmat tunnistetaan viittauksen alla sekä oikealla puolella.

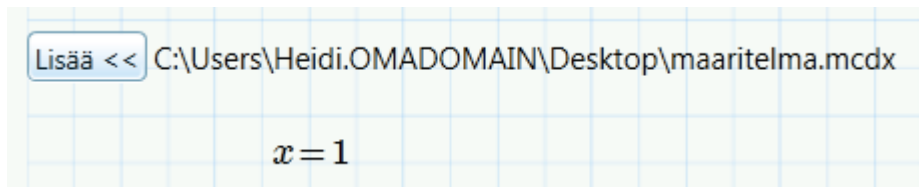
Laskentapohjaan voidaan liittää toinen laskentapohja **Vienti/tuonti** -välilehden **Liitä laskentapohja** -painikkeesta.



Painikkeesta avautuu laskentapohjaan seuraavanlainen ruutu. Klikkaamalla **Lisää**-painiketta voidaan selata muita laskentapohjia.



Tässä esimerkissä laskentapohjaan liitetään `maaritema.mcdx` niminen laskentapohja. Tähän laskentapohjaan on aiemmin määritelty $x := 1$. Kuten alla olevasta kuvasta voidaan huomata, liitetyn laskentapohjan sisältöä voidaan nyt hyödyntää nykyisessä laskentapohjassa. Muuttuja x ratkeaa ykköseksi.



Huom. Erityisen kätevä viittauksen käyttösovellus on luoda paljon käytetyille yksiköille ja funktioille tiedosto ja viitata siihen kaikilla dokumenteillasi. Näin ollen näiden tietojen osalta sinun tarvitsee vain päivittää ja ylläpitää viitattua sivua kaikkien dokumenttien sijaan. Viittaukset voidaan myös tallentaa osana dokumenttia.

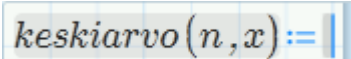
Tärkeää: Varmista, että käytät yhtenäisiä alkuarvoja päädokumentillasi ja viitatuilla dokumenteilla. Muuten ohjelma ilmoittaa virheistä tai saamasi tulokset ovat vääriä.

Vaihe vaiheelta 6

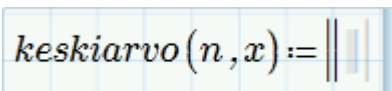
Harjoitus 1

Tässä harjoituksessa luodaan toiseen laskentapohjaan keskiarvon laskeva funktio, jota sitten hyödynnetään toisessa laskentapohjassa. Samalla opetellaan hieman ohjelmointia, jota käsitellään vielä myöhemmin enemmän.

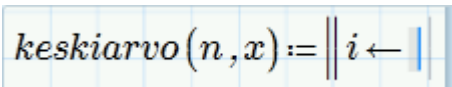
1. Avaa Mathcad ja uusi laskentapohja.
2. Luodaan ohjelma, joka laskee keskiarvon. Kirjoita laskentapohjaan funktion nimi ja sen argumentit sekä lisää määrittelyoperaattori.



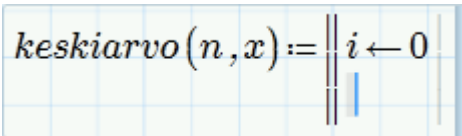
3. Aloita uusi ohjelma lisäämällä ohjelmaoperaattori Ohjelmointi-valikosta tai painamalla $\equiv$.



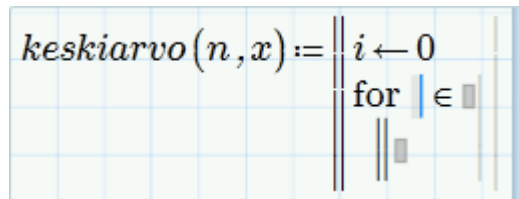
4. Kirjoita laskurimuuttuja i ja lisää paikallinen sijoitus -operaattori Ohjelmointi-valikosta tai painamalla Shift+' (pilkku askelpalauttimen vieressä).



5. Sijoita laskurimuuttujaan arvo 0 ja paina Enter.



6. Lisää for-lause kirjoittamalla for ja painamalla Ctrl+J.



7. Täytä tyhjät paikanvaraajat kuvassa esitetyllä tavalla. Kaksi pistettä kuvaa arvoaluetta. Muuttujan alaindeksin saa taas helpoiten lisättyä painamalla Alt+Ctrl+[. Valitse lopuksi oikealla nuolinäppäimellä for-lause ja paina Enter.

$$\text{keskiarvo}(n, x) := \begin{array}{l} i \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0, 1 \dots n-1 \\ \quad \text{summa} \leftarrow \text{summa} + x_i \end{array}$$

8. Kirjoita ohjelman viimeinen rivi ja klikkaa laskentapohjaa ohjelman ulkopuolelta.

$$\text{keskiarvo}(n, x) := \begin{array}{l} i \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0, 1 \dots n-1 \\ \quad \text{summa} \leftarrow \text{summa} + x_i \\ \text{keskiarvo} \leftarrow \frac{\text{summa}}{n} \end{array}$$

Funktion kuvaus

Funktion argumentti n on vektorin alkioden lukumäärä ja x taas vektori, joka sisältää luvut, joista keskiarvo lasketaan.

Ohjelman alussa alustetaan laskurimuuttuja, joka saa ohjelman suorituksen aikana arvot 0, 1, 2, ... aina arvoon (alkioiden lukumäärä – 1) asti. Laskurimuuttuja käy siis läpi kaikki vektorin alkiot.

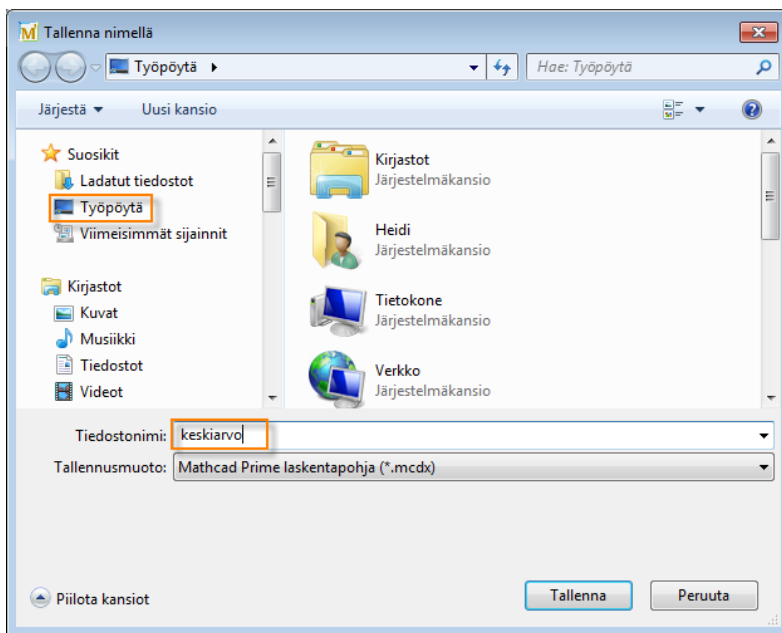
For-silmukka laskee vektorin alkiot yhteen. Se lisää aina edellisten alkioden summaan seuraavan alkion arvon.

Ohjelma palauttaa viimeisellä rivillä lasketun *keskiarvon*, jossa siis alkioden summa jaetaan alkioden lukumäärällä.

9. Tallenna laskentapohja klikkaamalla Tallenna-kuvaketta pikatyökaluriviltä.

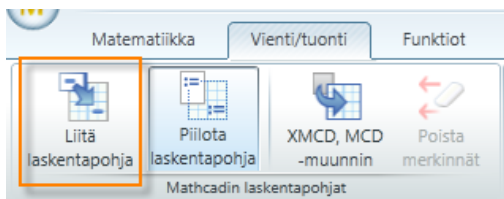


10. Tallenna laskentapohja nimellä keskiarvo sellaiseen paikkaan, josta se on helppo löytää, esimerkiksi työpöydälle. Sulje sitten tiedosto.

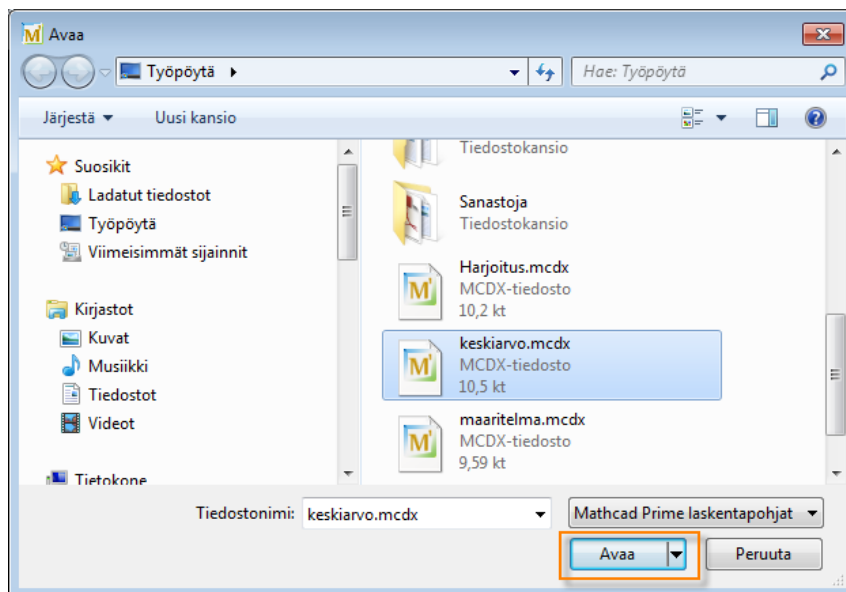


11. Avaa Mathcad ja samalla uusi laskentapohja.

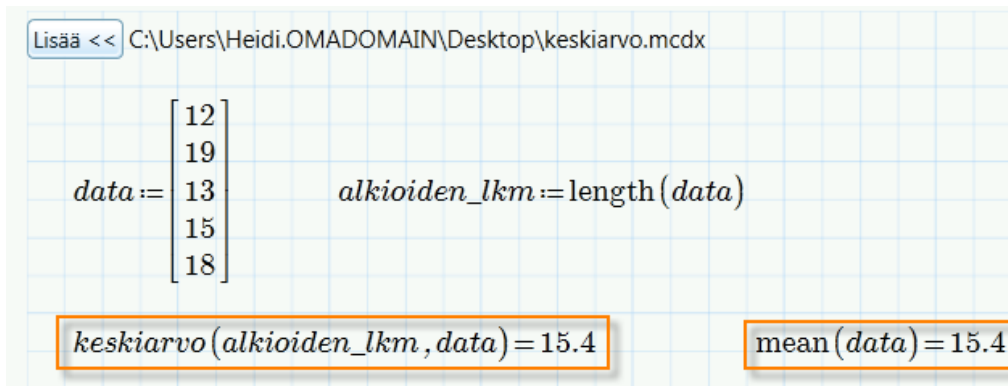
12. Käytetään nyt keskiarvon laskevaa funktiota uudessa laskentapohjassa. Liitetään edellä luotu laskentapohja nykyiseen laskentapohjaan Vienti/tuonti-välilehdeltä.



13. Klikkaa lisää ja hae tiedosto työpöydältä.



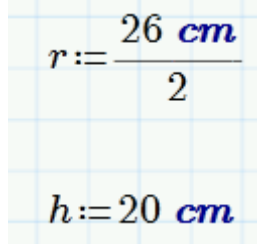
14. Nyt funktiota voidaan käyttää viittauksen alapuolella. Lasketaan data-vektorin sisältämien lukujen keskiarvo.



- *data*-vektorin pituus eli alkioiden lukumäärä on laskettu tässä sisäänrakennetulla *length*-funktiolla. Alkioiden lukumäärä on 5.
- Huomataan myös, että sisäänrakennetulla *mean*-funktiolla päästäisiin samaan lopputulokseen.

Tehtäviä 6: Dokumentin järjestäminen ja muokkaaminen

1. Lieriön pohjan halkaisija on 26 cm ja korkeus 20 cm.


$$r := \frac{26 \text{ cm}}{2}$$
$$h := 20 \text{ cm}$$

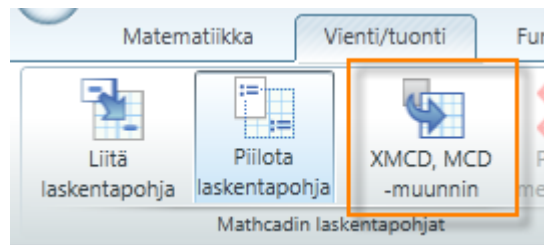
- (a) Määrittele lieriön tilavuuden kaava ja laske tilavuus.
 - (b) Aseta sininen risti muuttujien h ja r välineen ja paina kolme kertaa Enter lisätäksesi muuttujien väliin tyhjää tilaa.
 - (c) Pidä sininen risti muuttujien h ja r välissä ja paina Askelpalautinta, mikä pistaa tyhjää tilaa.
 - (d) Liikuttele matemaattisia alueita sivusuunnassa. Huomaa, että Mathcad tasaa alueet laskentapohjan ruudukon mukaan.
2. Lisää dokumenttiin ylätunniste ja laita siihen
- (a) sivunumero oikeaan yläreunaan
 - (b) oma nimi vasempaan yläreunaan
 - (c) keskelle otsikoksi "Tehtäviä 6".

Dokumentin jakaminen

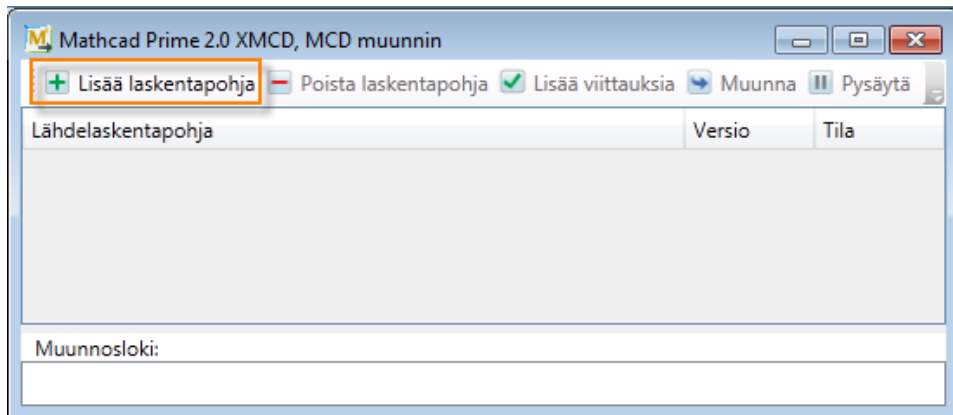
Mathcadin vanhemmat versiot

Aiemmillä versioilla luotuja dokumentteja on mahdollista avata uudella Mathcad Prime -versioilla, kunhan ne on ensin muunnettu sopivaan muotoon. Muunnos edellyttää, että sekä Mathcadin vanhempi versio että Mathcad Prime ovat asennettuina koneellasi.

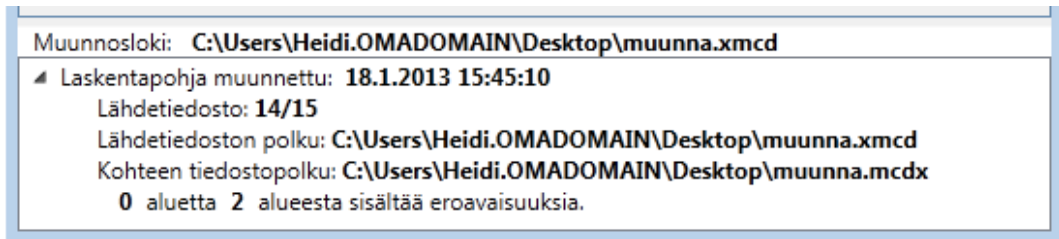
Aloitetaan muunnos klikkaamalla **Vienti/tuonti** -välilehdeltä **XMCD, MCD-muuntimella**. Tällä muuntimella voidaan siis muuntaa mcd- ja xmcd-tiedostot mcdx-tiedostoiksi.



Lisätään muunnettavat tiedostot sitten aukeavan ikkunan vasemmasta yläkulmasta.



Kun tiedostot on lisätty, klikkaa ikkunan oikeasta reunasta **Muunna**. Ikkunan alareunassa olevasta **muunnoslokista** voit seurata prosessin etenemistä.

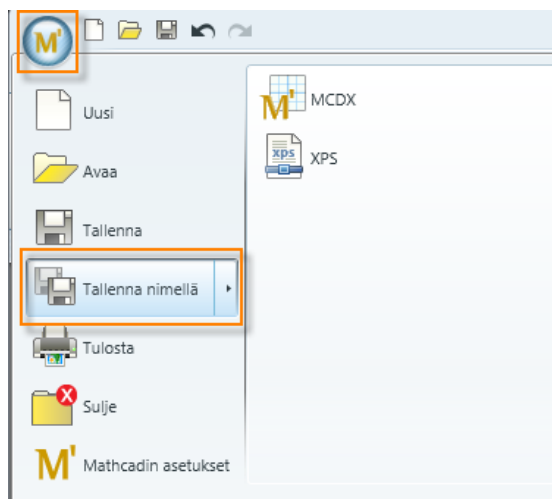


Mikäli laskentapohjien välillä on eroavaisuuksia tai jotakin laskutoimitusta ei voida suorittaa uudella versiolla, Mathcad antaa tästä ilmoituksen.

Mathcad ilmoittaa kaikesta sellaisesta sisällöstä, jota ei enää tueta, ja tallentaa sitten alkuperäisen sisällön kuvaksi. Ohjelma ilmoittaa esimerkiksi kaikista uudistuneista laskentamenetelmistä, tulosten muodoista ja operaattoreista. Lisätietoja uusista ominaisuuksista löytyy Mathcadin *Siirtymisoppaasta*.

Dokumentin tallentaminen

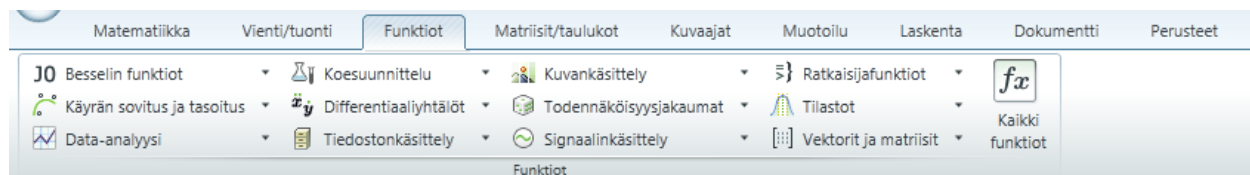
Valmis dokumentti voidaan tallentaa mcdx- tai xps-tiedostoksi klikkaamalla ohjelman vasemmassa yläkulmassa olevaa **Mathcad**-painiketta ja valitsemalla sitten **Tallenna nimellä**. Tallennuksen jälkeen tiedosto voidaan jakaa muillekin käyttäjille.



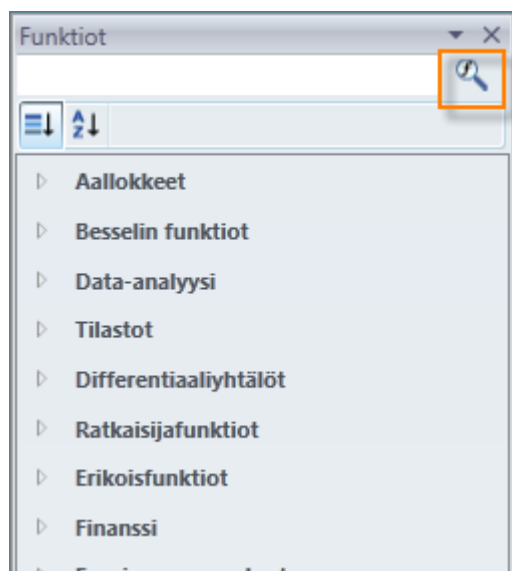
Funktiot

Sisäänrakennetut funktiot

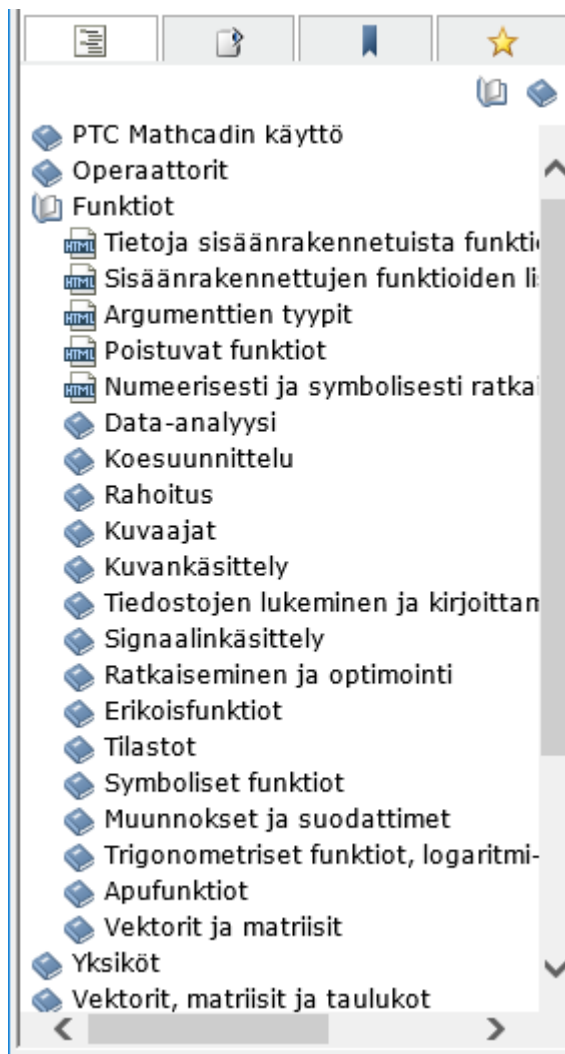
Mathcadin sisäänrakennettujen funktioiden laaja skaala sisältää funktioita trigonometrisistä funktioista aina erikoisempiin taloudellisiin funktioihin saakka.



Funktiot on luokiteltu **Funktiot**-välilehdelle kategoriioihin, jotta ne ovat helpommin löydettävissä. Kaiken kattava lista funktioista löytyy taas valitsemalla **Kaikki funktiot** -painike välilehden vasemmasta reunasta. Tällöin ruudun vasempaan reunaan ilmestyy lista, josta voidaan esimerkiksi etsiä funktioita hakukentän avulla.



Mathcadin ohjetiedostoista löytyy tarkka kuvaus kaikkien sisäänrakennettujen funktioiden toiminnasta. Ohjeisiin pääsee käsiksi klikkaamalla **Perusteet**-välilehdeltä **Ohjeet**-kuvaketta. Funktioita käsittelevät ohjeet löytyvät valitsemalla *Mathcad Prime / Funktiot*.



Vaihtoehtoisesti voidaan funktion kirjoittamisen jälkeen klikata funktiota ja painaa F1-näppäintä, jolloin päästään lukemaan samoja funktiokohtaisia ohjetiedostoja.

Katsotaan seuraavaksi tarkemmin, minkälaisia funktioita Mathcadista löytyy. Voit esimerkiksi etsiä neliömatriisille *ominaisarvot* ja *-vektorit* käyttämällä funktioita *eigenvals* ja *eigenvecs* valitsemalla **Vektori ja matriisi** -kategorian. Funktiot voidaan myös suoraan kirjoittaa laskentapohjaan.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ \frac{1}{2} & 6 & 7.9 \\ 0 & 4 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{bmatrix} 9.64 \\ 0.628 \\ -3.144 \end{bmatrix} \quad \text{eigenvecs}(A) = \begin{bmatrix} -0.508 & 0.998 & -0.553 \\ -0.794 & -0.007 & -0.527 \\ -0.334 & -0.058 & 0.645 \end{bmatrix}$$

Mathcadissa trigonometriset funktiot käyttävät oletuksellisesti radiaaneja. Toisin sanoen funktioihin kuten *sin* ja *cos* on syötettävä argumentti radiaaneina. Käänteisfunktio, kuten *atan*, palauttavat arvon radiaaneina.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{atan}(1) = 0.785$$

Asteita käytettäessä on arvoon lisättävä perään "deg". Mikäli tulos halutaan muuttaa asteiksi, kirjoitetaan deg yksiköiden paikanvaraajaan. Käsitlemme tätä perusteellisemmin yksiköiden osiossa.

$$\sin(90 \text{ deg}) = 1 \quad \text{atan}(1) = 0.785 \cdot \text{deg}$$

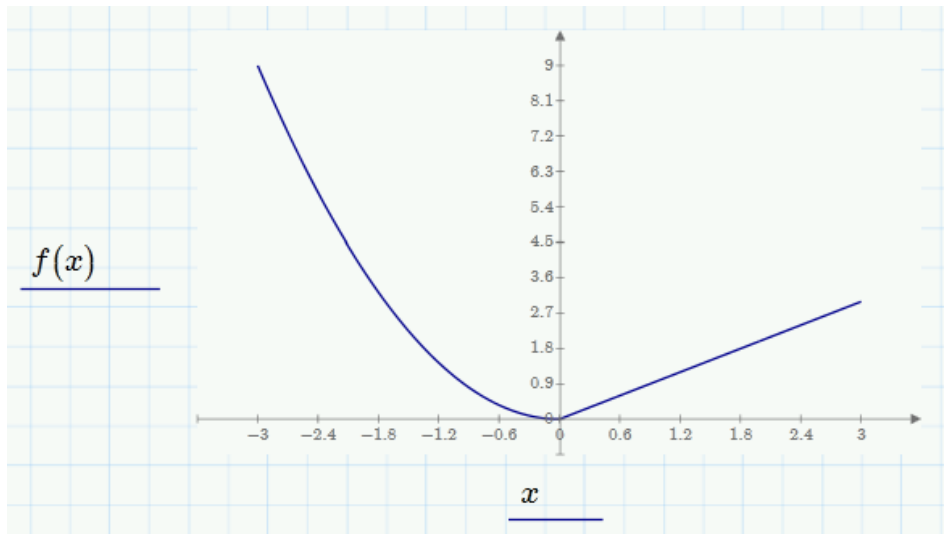
$$\text{atan}(1) = 45 \text{ deg}$$

Toinen hyödyllinen funktio on if(cond, x, y). Se löytyy apufunktioista ja vaatii kolme argumenttia. Ensimmäinen argumentti *cond* on ehto, jonka arvo on *true* tai *false*. Se on usein epäyhtälö, kuten $x < 0$.

Toinen ja kolmas argumentti kertovat ohjelmalle, mitä tehdään, jos ensimmäiseen paikanvaraajaan kirjoitettu ehto on tosi tai epätosi. *if* -funktio on erityisen käytännöllinen paloittain jatkuvien funktioiden määrittelyssä.

$$f(x) := \text{if}(x < 0, x^2, x)$$

$$x := -3, -2.99 \dots 3$$



Tässä funktio $f(x)$ on x^2 , silloin kun muuttujan x arvot ovat pienempiä kuin 0. Kun taas muuttujan arvot ovat suurempia kuin 0, funktio $f(x)$ on x . Kuvaajasta nähdään, että funktion muoto siis on erilainen ennen nollaa ja nollan jälkeen. Ennen nollaa annettu ehto on tosi ja nollan jälkeen epätosi. Kuvaajien piirtämistä käsittelemme hieman myöhemmin.

Enemmän tietoa kunkin funktion suorittamasta algoritmista löytyy Mathcadin ohjeista.

Käyttäjän omat funktiot

Aiemmin mainittiin jo käyttäjän mahdollisuudesta luoda itse ohjelmoituja funktioita Mathcadiin. Oma funktio voidaan määritellä laskentapohjaan samalla tavalla kuin muuttujakin. Alla on aiheesta esimerkki:

Koska kompleksilukuja on mahdotonta syöttää suoraan polaarimuodossa, voit määritellä oman vastaavan funktion, joka sallii tämän.

$$pcomp(r, \theta) := r \cdot (\cos(\theta) + 1i \sin(\theta))$$

Erota funktioargumentit pilkulla. Käytä määritelmässä määrittelyoperaattoria. Syötä lisäksi kompleksiluvun i paikalle $1i$ ilman kertomerkkiä. (Tämän avulla Mathcad erottaa muuttujan i ja kompleksiluvun i .)

$$z := pcomp\left(1, \frac{\pi}{6}\right) \quad z = 0.866 + 0.5i$$

Arvoalumuuttujien käyttöä funktioissa on tärkeää harkita tarkasti. Kaikkien funktiomääritelmän oikealla puolella olevien muuttujien on oltava myös funktion argumenttina sen vasemmalla puolella. Alla on yksi esimerkki, miten arvoalumuuttujia voidaan hyödyntää funktioissa:

$$\begin{aligned} j &:= 0..5 \\ f(x, y) &:= x + y \\ f(1, j) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Funktion *argumenteiksi* voidaan asettaa myös toisia funktioita. Määrittelemäsi funktion sisältäessä toisen funktion, sen nimi vain lisätään funktion argumentteihin. Määritellään esimerkiksi funktio, joka laskee funktion määrätyn integraalin.

$$h(func, a, b) := \int_a^b func(x) dx$$

Argumentit a ja b ovat integrointirajat ja $func$ on funktio, joka integroidaan.

Integroidaan funktiot $\sin(x)$ ja $\cos(x)$. Näiden funktioiden nimet kirjoitetaan *ilman* argumentteja funktion h sisälle.

$$h(\sin, 0, \pi) = 2$$

$$h(\cos, 2.7, 6) = -0.707$$

Määritellään vielä oma funktio $m(t)$ ja integroidaan se.

$$m(t) := \sin(t) \cdot \cos(t) + e^t$$

$$h(m, 1, 4) = 51.812$$

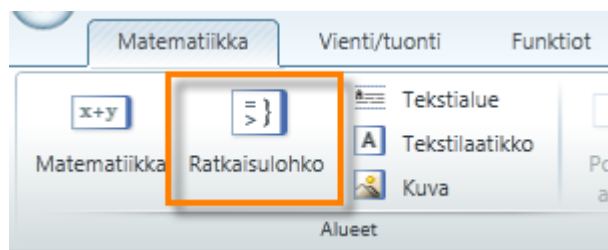
Ratkaisijafunktiot ja ratkaisulohko

Mathcadissa on yksi erityinen laskenta-alue, jolla voidaan muun muassa laskea yhtälöiden juuria, ratkaista yhtälö- ja epäyhtälöryhmiä sekä optimoida. Tätä aluetta kutsutaan *ratkaisulohkoksi*.

The screenshot shows a Mathcad 'Ratkaisulohko' (Solve Block) on a grid background. The block is titled 'Ratkaisulohko' in the top left corner. It is divided into three sections by blue brackets on the left:

- Alkuarvaukset** (Initial values): Contains two equations: $a := 1$ and $b := 1$.
- Rajoitusehdot** (Constraints): Contains two equations: $a - b = 6$ and $4 \cdot a + 5 \cdot b = 24$.
- Ratkaisija** (Solver): Contains the equation $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} := \mathbf{find}(a, b)$. A small blue plus sign is visible to the right of this equation.

Ratkaisulohko lisätään laskentapohjaan **Matematiikka**-välilehdeltä.

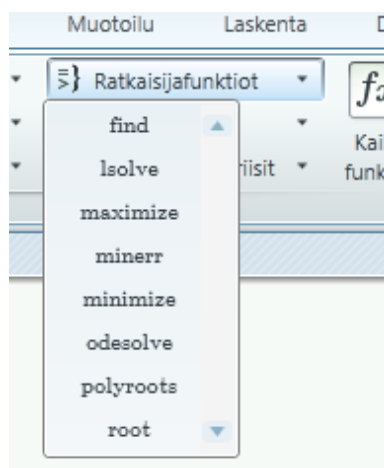


Ratkaisulohko koostuu kolmesta osasta: alkuarvaukset, rajoitusehdot ja ratkaisija. *Alkuarvaukset* määrittävät ratkaisulohkon yläosaan. Ne ovat arvoja, joita ratkaisulohko käyttää lähtökohtana ongelman ratkaisemiselle. Toisinaan ongelmalla saattaa olla useampia ratkaisuja, jolloin alkuarvauksia tulee muuttaa kaikkien ratkaisujen löytämiseksi.

Rajoitusehtoihin kirjoitetaan ongelmaa rajoittavat ehdot. Näissä ehdoissa tulee käyttää Boolean operaattoreita, jotka löytyvät **Matematiikka**-välilehdeltä, **Operaattorit**-valikosta.

Boolean operaattorit					
$\in$	$=$	$\oplus$	$>$	$\geq$	
$<$	$\leq$	$\wedge$	$\neg$	$\vee$	
$\neq$					

Ratkaisijat ovat Mathcadin erityisiä funktioita, joita voidaan käyttää vain ratkaisulohkon sisällä. Näitä funktioita ovat *find*, *minerr*, *minimize*, *maximize* ja *odesolve* ja ne löytyvät **Funktiot**-välilehdeltä, omasta kategoriastaan.



Ratkaisijafunktioita voidaan käyttää monenlaisten ongelmien ratkaisemiseen. Esimerkiksi *find*-funktiolla voidaan ratkaista yhtälöryhmiä, kun taas *odesolve*-funktio soveltuu tavallisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen.

Poistuvat funktiot

Olemme jo hieman käsitelleet Mathcadin aiempien versioiden laskentapohjien muuttamista uuteen versioon sopiviksi. Tässä manittakoon nyt lyhyesti vanhojen versioiden poistuvia funktioita.

Mathcad Prime -versio tukee edelleen vanhojen versioiden funktioita, mikä tarkoittaa, että vanhoilla funktioilla voi edelleen laskea Mathcad Prime -versiossa. Ohjelman myöhemmät versiot eivät kuitenkaan enää tue näitä funktioita, joten vanhat laskentapohjat kannattaa muuttaa uutta ohjelmaa vastaaviksi. Muunnettaessa vanhoja laskentapohjia, Mathcad ilmoittaa eroavaisuuksista myös funktioiden kohdalla.

Lista kaikista poistuvista funktioista ja niille sopivista vaihtoehdoista löytyy ohjeista *Mathcad Prime / Funktiot / Poistuvat funktiot*. Ohjeet saa avattua **Perusteet**-välilehdeltä.

Vaihe vaiheelta 7

Harjoitus 1

Tässä harjoituksessa määrittelemme vektorin v arvoksi funktion f saamat arvot arvoaluemuuttujan t funktiona. Ennen kuin aloitat, varmista, että origo on 1.

ORIGIN := 1

1. Määrittele funktiot $f(x) = 4x^2 - 6x + 5$ ja $h(a, b, x) = \cos(x)^a \sin(x)^b$. Käytä määritelmän merkkiä Operaattorit-valikosta tai kirjoita :.

$$f(x) := 4x^2 - 6x + 5 \qquad h(a, b, x) := \cos(x)^a \cdot \sin(x)^b$$

2. Laske $f(2)$, $h(2, 3, 2)$ sekä $f(h(2, 5, 1))$. Käytä ratkaisuooperaattoria eli yhtäsuuruutta = nähdäksesi tulokset.

$$f(2) = 9$$

$$h(2, 3, 2) = 0.13$$

$$f(h(2, 5, 1)) = 4.322$$

3. Määrittele arvoaluemuuttuja $t = 5, 5.1, \dots, 6$. Kirjoita määrittelyoperaattorin jälkeen alueen ensimmäinen arvo 5 ja pilkku , . Kirjoita sitten alueen toinen arvo. Tämä määrittelee arvoalueen askelvälin. Siirry sitten nuolella viimeiseen paikanvaraajaan ja kirjoita alueen viimeinen arvo 6. Arvoaluemuuttuja askelvälillä voidaan lisätä myös Operaattorit-valikosta.

$$t := 5, 5.1 \dots 6$$

4. Ratkaise f muuttujan t funktiona. Kirjoita $f(t)$ ja sitten =.

$$f(t) = \begin{bmatrix} 75 \\ 78.44 \\ 81.96 \\ 85.56 \\ 89.24 \\ 93 \\ 96.84 \\ 100.76 \\ 104.76 \\ 108.84 \\ 113 \end{bmatrix}$$

5. Tallenna funktion $f(t)$ arvot vektoriksi nimeltä v . Kirjoita v ja lisää sitten alaindeksi painamalla [eli Ctrl+Alt+8. Alaindeksi voidaan lisätä myös Operaattorit-valikosta.

$$v$$

6. Vektorin alaindeksin on oltava kokonaisluku. Koska origo on 1, myös vektorin indeksöinnin on alettava tästä luvusta. Kirjoita paikanvaraajaan $10 \cdot t$, jolloin saadaan aikaan kokonaisluku.

$$v_{10 \cdot t}$$

7. Lisää alaindeksiin vielä -49. Näin saadaan indeksöinti alkamaan ykkösestä.

$$v_{10 \cdot t - 49}$$

8. Määrittele vektorin v arvoiksi funktion $f(t)$ arvot. Kirjoita vektorin perään : ja $f(t)$. Ratkaise vektori v käyttäen ratkaisuoperaattoria =.

$$v_{10 \cdot t - 49} := f(t)$$

$$v = \begin{bmatrix} 75 \\ 78.44 \\ 81.96 \\ 85.56 \\ 89.24 \\ 93 \\ 96.84 \\ 100.76 \\ 104.76 \\ 108.84 \\ 113 \end{bmatrix}$$

9. Määrittele funktio $\text{span}(v) = \max(v) - \min(v)$, joka laskee vektorin v suurimman ja pienimmän arvon erotuksen. Max ja min ovat ohjelman valmiita funktioita.

$$\text{span}(v) := \max(v) - \min(v)$$

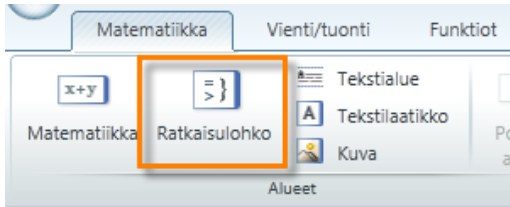
10. Ratkaise tämä funktio syöttämällä $\text{span}(v)$ ja merkki =.

$$\text{span}(v) = 38$$

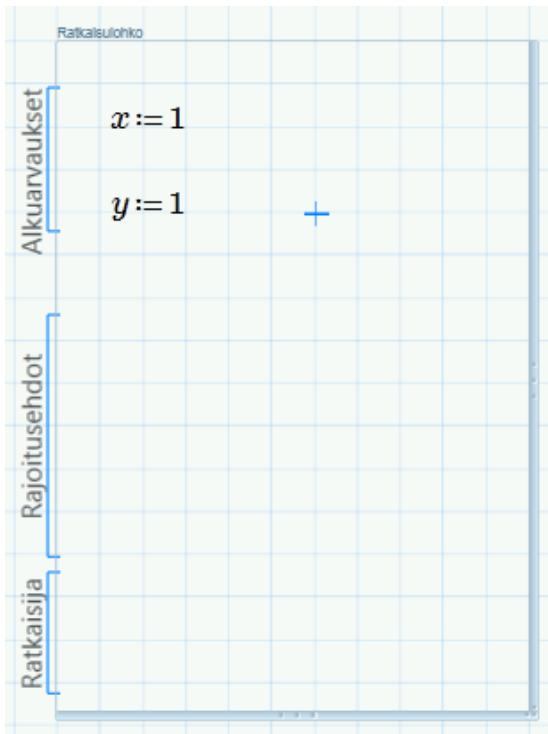
Harjoitus 2

Tässä harjoituksessa ratkaisemme ratkaisulohkolla yhtälöparin.

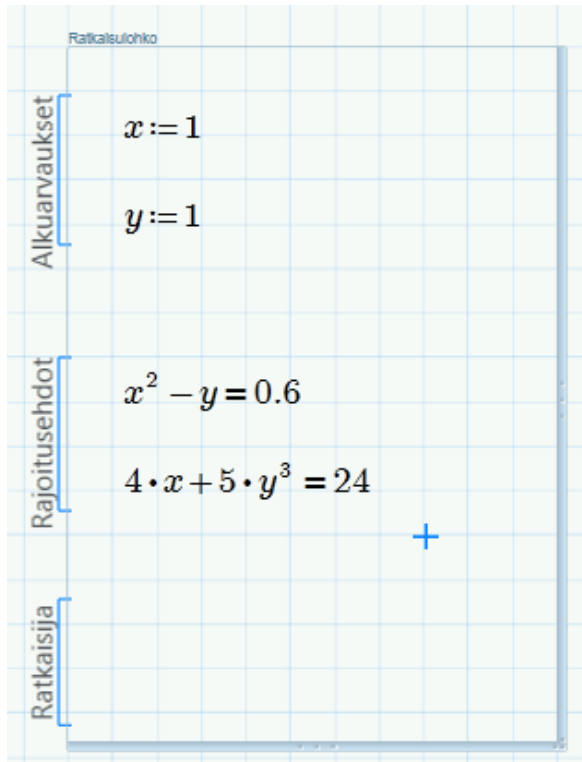
1. Lisää ratkaisulohko Matematiikka-välilehden Ratkaisulohko-painikkeesta tai paina pikanäppäintä Ctrl+1.



2. Kirjoita molempien ratkaistavien muuttujien alkuarvauksiksi arvo 1.



3. Kirjoita ratkaistavat yhtälöt käyttäen *vertailevaa yhtäsuuruutta* Operaattorit-valikosta.



4. Määrittele *tulos*, joka saa ratkaisijafunktion *find* laskemat arvot.

The image shows a Mathcad worksheet with a grid background. At the top, a blue header bar contains the text "Ratkaisulohko". Below this, the worksheet is organized into three sections, each indicated by a blue bracket on the left:

- Alkuarvaukset** (Initial values):
 - $x := 1$
 - $y := 1$
- Rajoitusehdot** (Constraints):
 - $x^2 - y = 0.6$
 - $4 \cdot x + 5 \cdot y^3 = 24$
- Ratkaisija** (Solver):
 - $tulos := \mathbf{find}(x, y) +$

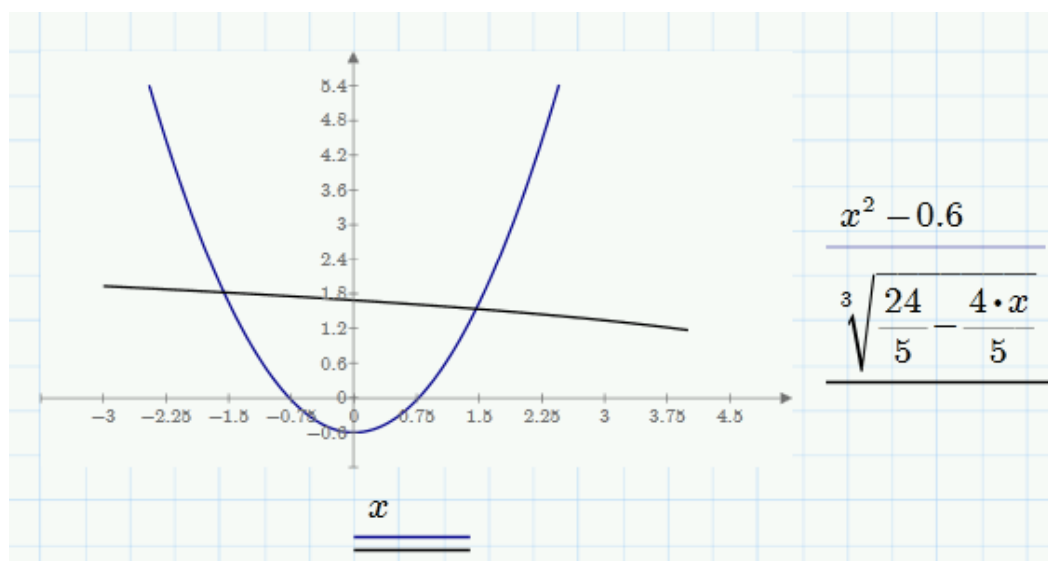
5. Näytä tulos ratkaisemalla *tulos*-muuttuja ratkaisulohkon ulkopuolella.

The image shows a Mathcad worksheet with a grid background. The equation $tulos = \begin{bmatrix} 1.462 \\ 1.537 \end{bmatrix}$ is displayed. The result is a column vector with two elements, 1.462 and 1.537, enclosed in square brackets. The entire equation is highlighted with a grey selection box.

Kuvaajasta voidaan nähdä, että tulos on käyrien oikean puolimmainen leikkauspiste. Kuvaajien piirtämiseen palaamme vielä myöhemmin.

Toisen leikkauspisteen löytämiseksi tulisi muuttaa tehtävän alkuarvauksia. Sopivat alkuarvaukset voisivat olla vaikkapa $x := -3$ ja $y := 1$. Tällöin arvaus olisi lähempänä vasemman puolimmaista leikkauspistettä ja ratkaisulohkon algoritmi päätyisi tähän ratkaisuun.

$$tulos = \begin{bmatrix} 1.462 \\ 1.537 \end{bmatrix}$$



Tehtäviä 7: Funktiot ja ratkaisulohko

1. Ympyrän pinta-ala on

$$A = \pi r^2$$

missä r on ympyrän säde.

- Määritä ympyrän pinta-ala säteen funktiona. Muodosta siis funktio, joka laskee ympyrän pinta-alan, kun sille annetaan argumentiksi säde.
- Laske ympyrän ala, kun säde on 10 cm, 30 cm ja 45,5 cm.

2. Laatikon tilavuus on

$$V = a \cdot b \cdot c$$

missä a , b ja c ovat laatikon sivujen pituudet.

- Määritä laatikon tilavuus sen sivujen pituuksien funktiona. Muodosta siis funktio, joka laskee laatikon tilavuuden, kun sille annetaan argumenteiksi laatikon sivujen pituudet.
 - Laske suklaarasian tilavuus funktion avulla, kun rasian mitat ovat 45 mm, 90 mm ja 130 mm.
 - Laske lelulaatikkoon tilavuus, jonka leveys on 28 cm, korkeus 20 cm ja syvyys 38 cm.
3. Olet tekemässä tilastollista analyysiä yrityksesi asiakkaista. Alla on saamasi aineisto, jossa on asiakkaiden iät.

	35
	45
$ikä :=$	56
	32
	32
	51

- a) Laske asiakkaiden keski-ikä funktion *mean* avulla.
- b) Haluat laskea myös asiakkaiden iän varianssin eli jakautumisen keskiarvon ympärille. Muistat, että varianssin laskemiseen voitiin käyttää funktiota *Var*, mutta et kuitenkaan tarkalleen ottaen muista, mitä funktion argumentit olivat.

Tarkista funktion toiminta Mathcadin ohjeista kirjoittamalla laskentapohjaan *Var*, kaksoisklikkaamalla funktion nimeä ja painamalla F1. Mitä ovat funktion *Var* argumentit?

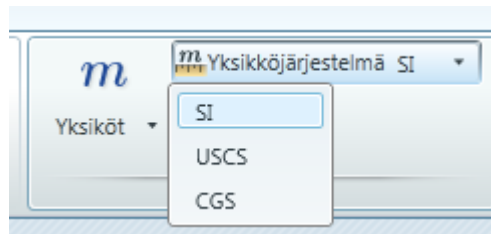
- c) Laske asiakkaiden iän varianssi.
4. Ratkaise ratkaisulohkolla seuraava yhtälöryhmä.

$$\begin{array}{l} 2x + 3y = 2 \\ x + 6y = 8 \end{array}$$

Yksiköt

Eräs Mathcadin huomattava vahvuus on sen kyky tunnistaa yksiköt. Useimmat suunnittelijat käyttävät yksiköitä päivittäin laskennassaan ja haluavat myös laskentaohjelman ottavan ne huomioon. Tämä helpottaa myös laskutoimitusten oikeellisuuden tarkistamista.

Mathcad tuntee kolme erilaista yksikköjärjestelmää: SI (International System of Units), USCS ja CGS. Lisäksi voit valita tulokset näytettäväksi kokonaan ilman yksiköitä. Avatessasi uuden dokumentin Mathcad käyttää oletusarvoisesti SI-järjestelmää. Yksikköjärjestelmää voi halutessaan vaihtaa **Matematiikka-**välilehdeltä.



Mathcad tunnistaa käytetyn yksikköjärjestelmän, eikä sekoita laskelmissa eri yksikköjärjestelmiä keskenään.

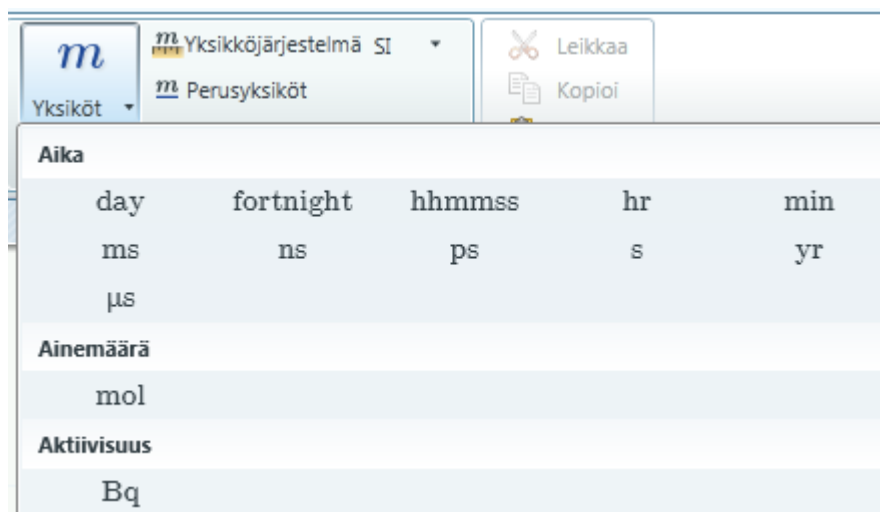
Yksiköiden lisääminen määrittelyyn

Kun haluat muuttujan määrittelyn sisältävän myös yksikön, voit yksinkertaisesti lisätä sen määrittelyn perään.

aika := 2 s massa := 76 kg resistanssi := 2 Ω

Yksikön ja arvon väliin ei tarvita kertomerkkiä. Mathcad lisää itse arvon ja yksikön väliin pienen raon.

Yksikkö voidaan joko kirjoittaa lausekkeeseen tai se voidaan lisätä **Matematiikka-**välilehden **Yksiköt**-valikosta, jonne on luokiteltu ohjelman kaikki yksiköt.



Yksiköt mukana laskutoimituksissa

Mathcad pitää yksiköitä mukana laskutoimituksissa edettäessä. Alla on aiheesta esimerkki.

$$\begin{aligned}
 \text{massa} &:= 76 \text{ kg} \\
 \text{kiihtyvyys} &:= 7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\
 \text{voima} &:= \text{massa} \cdot \text{kiihtyvyys} \\
 \text{voima} &= 532 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Määritellään massa

Määritellään kiihtyvyys

Voiman yhtälö

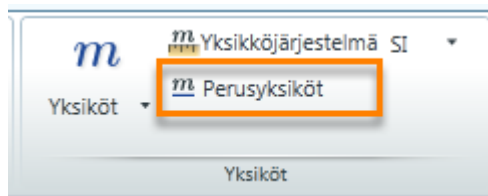
Yksikköä N kutsutaan Newtoniksi.

532 Newtonia on odottamaton vastaus, vaikka mitään muuttujia ei oltu määritelty Newtonina. Miksi Mathcad ei antanut seuraavaa vastausta:

$$(76 \text{ kg}) \cdot \left(7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 532 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} ?$$

Selitys on yksinkertainen: Mathcad pyrkii automaattisesti tunnistamaan ja yksinkertaistamaan yksiköt, mikäli se vain on mahdollista.

Usein tämänkaltainen tulos halutaan saada Newtonina, koska se on voiman yleinen yksikkö. Mikäli ei haluta, että **Yksiköt**-ryhmästä voidaan valita perusyksiköt käyttöön.



Mathcad suorittaa myös yksiköillä laskettaessa niiden järjellisuuden **tarkastuksen**. Tällä varmistetaan, että laskutoimituksissa ei ole yksikkövirheitä. Tarkastellaan seuraavaa esimerkkiä, jossa Mathcad ilmoittaa virheestä, kun lasketaan yhteen aikaa ja pituutta.

$$aika := 2 \text{ s}$$

$$matka := 10 \text{ m}$$

$$aika + \boxed{matka} = ?$$

Nämä yksiköt eivät sovi yhteen.

On tärkeää huomata, että vaikka Mathcad sallii käyttäjän määritellä muuttujia yksiköiden kanssa, kaikki Mathcadissa valmiina olevat funktiot eivät hyväksy yksiköitä. Mathcad näyttää virheilmoituksen, mikäli käytettävä funktio ei käytä yksiköitä.

$$\sin(2 \text{ ft}) = ?$$

Nämä yksiköt eivät sovi yhteen.

$$\sin(2) = 0.909$$

Kulma on radiaaneja (oletusasetus).

$$\sin(2 \text{ deg}) = 0.035$$

Kulma on asteita.

Yksikön sisältävien tulosten näyttäminen

Oletetaan, että etäisyys halutaan määritellä jalkoina:

$$a := 100 \text{ ft}$$

Kun a :n arvo ratkaistaan, ohjelma palauttaa seuraavan:

$$a = 30.48 \text{ m}$$

Syy on se, että 100 jalkaa vastaa 30,48 metriä (100 jalkaa kerrottuna luvulla 0,3048 metriä per jalka) ja metri on SI-yksikköjärjestelmässä pituuden perusyksikkö.

Mikäli haluat nähdä tulokset jalkoina, klikkaa yksikköjen paikanvaraajaa, joka ilmestyy tuloksen oikealle puolelle, ja kirjoita siihen haluttu yksikkö.

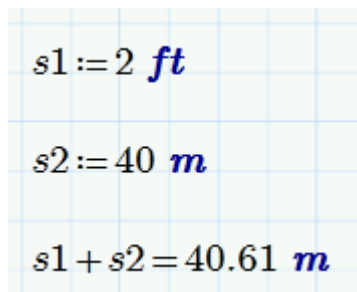
Mathcad muuttaa lukuarvon automaattisesti oikeaksi ja näyttää halutun yksikön.



Yleisin Mathcadin käyttäjien kysymys lienee: miksei Mathcad näytä muuttujan arvoa yksiköinä, joina se on määriteltä?

Vastaus: Mathcad muuttaa yksiköt määritelmässä kunkin käytössä olevan yksikköjärjestelmän mukaan perusyksiköihin varmistaakseen yhdenmukaisen laskennan yksiköillä, jotka vastaavat toisiaan.

Seuraava esimerkkilasku sisältää kahta eri pituuden yksikköä.


$$\begin{aligned} s1 &:= 2 \text{ ft} \\ s2 &:= 40 \text{ m} \\ s1 + s2 &= 40.61 \text{ m} \end{aligned}$$

Vaikka on täysin hyväksyttävää syöttää alkuarvoihin kahta eri yksikköä, Mathcad ei voi mitenkään tietää, kumpaa näistä halutaan tulokseen. (Eikä ole sopivaa suorittaa yhteenlaskua ennen kuin alkuarvojen laadut on muutettu samaksi yksiköksi.) Tästä syystä vastaus palautetaan yksiköinä, minä kumpikin lähtöarvo on tallennettu (tässä tapauksessa molemmat $s1$ ja $s2$ muutettiin ja tallennettiin metreiksi).

Käyttäjän määrittelemät yksiköt

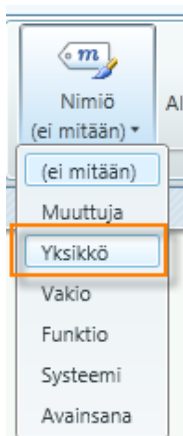
Vaikka Mathcad tunnistaakin useita yleisiä yksiköitä, voi olla hyödyllistä määritellä juuri itselleen sopivia yksiköitä Mathcadin tarjoamien yksiköiden pohjalta. Kätevyytensä lisäksi omien yksiköiden määrittely voi antaa työkirjallasi selkeyttä, mikäli haluat luoda paljon käytetystä yksiköstä lyhenteen. Määritellään uusi yksikkö *meganewton*.

$$\text{meganewton} := 1000 \text{ kN}$$

Yksiköitä määriteltäessä itse ne on nimettävät **Nimiöstä**, joka löytyy **Matematiikka**-välilehdeeltä. Kaksoisklikkaa yksikön nimeä.

$$\text{meganewton} := 1000 \cdot \text{kN}$$

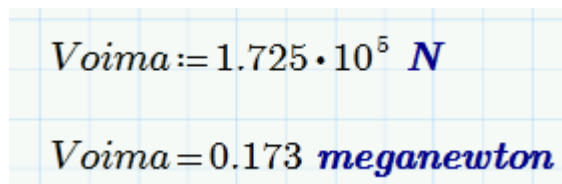
Valitse sitten Nimiöstä **Yksikkö**. Nimeämisen jälkeen ilmaisu saa yksikön mukaisen oletustyylin ja Mathcad tunnistaa sen jatkossa.



$$\text{meganewton} := 1000 \text{ kN}$$

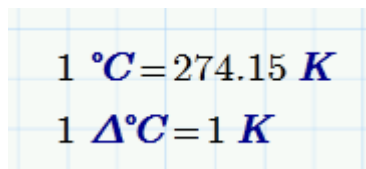
Nimeäminen auttaa Mathcadia tunnistamaan käyttäjän määritelmät yksiköiksi, eikä se sekoita niitä esimerkiksi muuttujiin tai funktioihin. Jos kaikki ilmaisut on nimetty laskentapohjassa asianmukaisesti, voidaan huoletta käyttää esimerkiksi samannimisiä muuttujia ja yksiköitä.

Minkä tahansa muun yksikön tavoin halutessasi tuloksen näytettävän omina yksikköinä, klikkaa yksiköiden paikanvaraajaa ja syötä haluamasi yksikkö.


$$\text{Voima} := 1.725 \cdot 10^5 \text{ N}$$
$$\text{Voima} = 0.173 \text{ meganewton}$$

Yleinen sudenkuoppa

Lopuksi on syytä mainita yksi ohjelman erityispiirre, joka liittyy lämpötilojen muutoksiin.


$$1 \text{ }^{\circ}\text{C} = 274.15 \text{ K}$$
$$1 \text{ } \Delta^{\circ}\text{C} = 1 \text{ K}$$

Tavallisissa fysiikan laskuissa on totuttu laskemaan lämpötilan muutos seuraavasti

$$T = 23^{\circ}\text{C} - 3^{\circ}\text{C} = 19^{\circ}\text{C}.$$

Mathcadissa merkintätapa on kuitenkin hieman tavallisesta poikkeava. Lämpötilan muutosta laskettaessa tulee käyttää nimittäin deltaa Δ , joka kertoo ohjelmalle, että nyt kyseessä on lämpötilan muutos.

Jos esimerkiksi lämpötila laskee 23 asteesta 3 astetta, kirjoitetaan se Mathcadiin seuraavasti:

$$T_1 := 23 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_2 := 23 \text{ } ^\circ\text{C} - 3 \text{ } \Delta^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Jos Mathcadissa käytettäisiin totuttua tyyliä, saataisiin väärä tulos.

$$T_1 := 23 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_2 := 23 \text{ } ^\circ\text{C} - 3 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_2 = -253.15 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Muita yksiköitä käytettäessä tämän kaltaista erityispiirrettä ei kuitenkaan ole.

Vaihe vaiheelta 8

Harjoitus 1

Tässä harjoituksessa tarkastellaan yksiköiden käyttöä ja näkymistä tuloksissa.

1. Määrittele muuttujan *nopeus* arvoksi 10 metriä (m) sekunnissa (s). Huomaa, että Mathcad lisää automaattisesti lukuarvon jälkeen kertomerkin.

$$nopeus := 10 \frac{m}{s}$$

2. Määrittele muuttujan *aika* arvoksi 2 minuuttia (min).

$$aika := 2 \text{ min}$$

3. Määrittele muuttujaksi *matka* nopeus kertaa aika.

$$matka := nopeus \cdot aika$$

4. Ratkaise matka ratkaisuooperaattorilla =.

$$matka = (1.2 \cdot 10^3) \text{ m}$$

5. Näytetään matka sittenkin jalkoina, eikä metreinä.

$$matka = (1.2 \cdot 10^3) \cdot \text{m}$$

$$matka = (1.2 \cdot 10^3) \cdot \text{m}$$

$$matka = (1.2 \cdot 10^3) \cdot$$

$$matka = (1.2 \cdot 10^3) \cdot \text{ft}$$

$$matka = (3.937 \cdot 10^3) \text{ ft}$$

1. Aseta kursori yksikön loppuun.

2. Valitse yksikkö välilyönnillä.

3. Poista yksikkö painamalla Delete- tai askelpalautin-näppäintä.

4. Kirjoita yksiköksi ft (engl. feet).

5. Paina Enter, jolloin tulos ilmoitetaan jalkoina.

Tehtävät 8: Yksiköt

1. Kulma on $\phi=30$. Laske $\sin \phi$ siten, että kulma
 - (a) on annettu radiaaneina.
 - (b) on annettu asteina.
2. Juoksulenkkisi lenkkisi pituus oli 5500 m ja juoksit sen ajassa 0,7 h.
 - (a) Kuinka monta kilometriä juoksulenkkisi oli?
 - (b) Kuinka monta minuuttia juoksulenkkisi oli?
 - (c) Laske vielä keskinopeutesi ja anna tulos km/h .
3. Funktio $D(t)$, joka kuvaa putoavan esineen etäisyyttä putoamiskohdastaan ajan funktiona, voidaan kirjoittaa näin:

$$a := g \quad g = 9.807 \frac{m}{s^2}$$

$$D(t, v_0) := v_0 \cdot t + \frac{a}{2} t^2$$

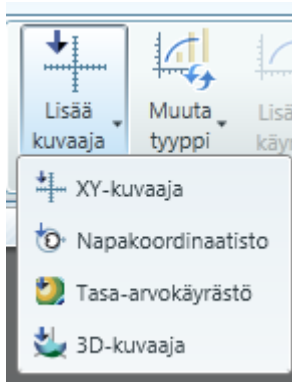
jossa $a = g$ = maan vetovoiman aiheuttama kiihtyvyys ja v_0 on alkunopeus.

- (a) Alkunopeudelle $v_0 = 5 \text{ m/s}$ laske, kuinka pitkän matkan esine on kulkenut 2 sekunnin, 15 minuutin ja 30 minuutin jälkeen.
 - (b) Anna a-kohdan tulos yksiköissä ft , yd ja km .
4. 1600-luvulla Suomessa oli käytössä tilavuusmittayksiköt tuoppi ja kannu. Tuoppi on suuruudeltaan 1,308 litraa ja kannuun mahtuu kaksi tuoppia.
 - (a) Montako tuoppia on viisi puolentoista litran maitotölkkillistä? Merkitse näkyviin kaikki laskutoimitukset ja käytä niissä litroja.
 - (b) Paljonko a-kohdan tulos on kannuina?

Kuvaajat

2D-kuvaajat

Mathcadissa on mahdollista piirtää kahdenlaisia 2D-kuvaajia: polaarisia ja xy-kuvaajia. Molemmat kuvaajatyypit löytyvät valikosta **Kuvaajat**-välilehdeltä, **Lisää Kuvaaja** -painikkeen alta. Niille voidaan käyttää myös pikanäppäimiä **Ctrl+1** (xy-koordinaatisto) ja **Ctrl+7** (napakoordinaatisto).



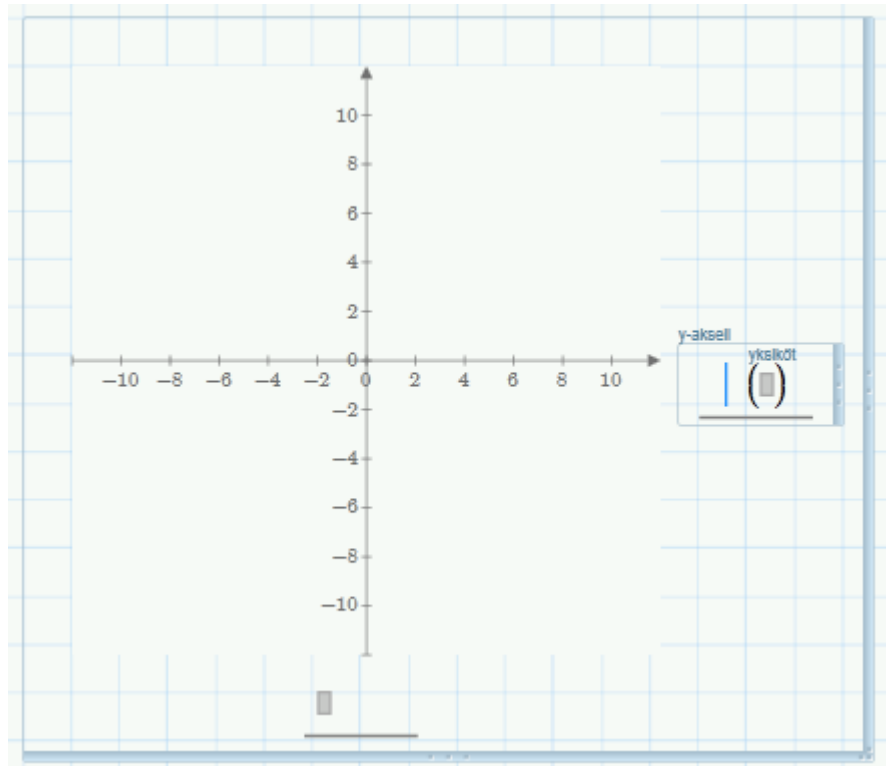
Kuvaajan luominen

Kuvaajia voidaan muodostaa funktioista tai vektoreista, ja niiden useita ominaisuuksia voidaan muokata. Katsotaan seuraavaksi, miten funktio voidaan piirtää xy-koordinaatistoon.

$$f(x) := \sin(x)$$

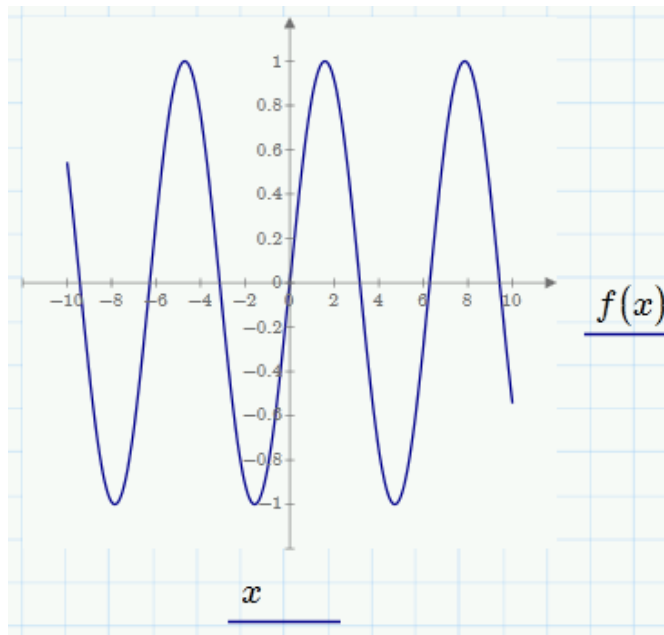
Kun funktio on määritelty, valitse *xy-kuvaaja* **Lisää kuvaaja** -valikosta.

funktio(t)



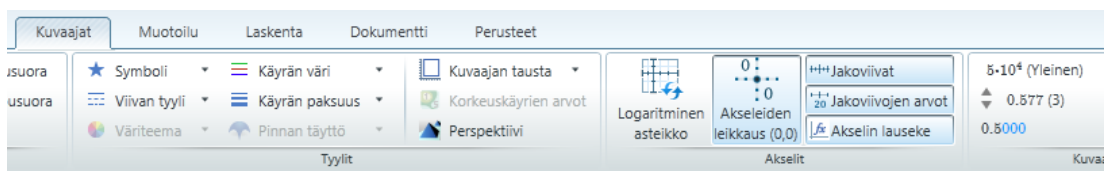
riippumaton muuttuja(t)

Huomaa kuvion kaksi tyhjää paikanvaraajaa: yksi funktiolle ja toinen funktion muuttujalle. Kirjoita y-akselin paikanvaraajaan funktio $f(x)$ ja x-akselin paikanvaraajaan muuttuja x . Jätä yksiköille tarkoitetut paikanvaraajat tässä tyhjiksi. Paina lopuksi Enter, jolloin Mathcad piirtää kuvaajan.

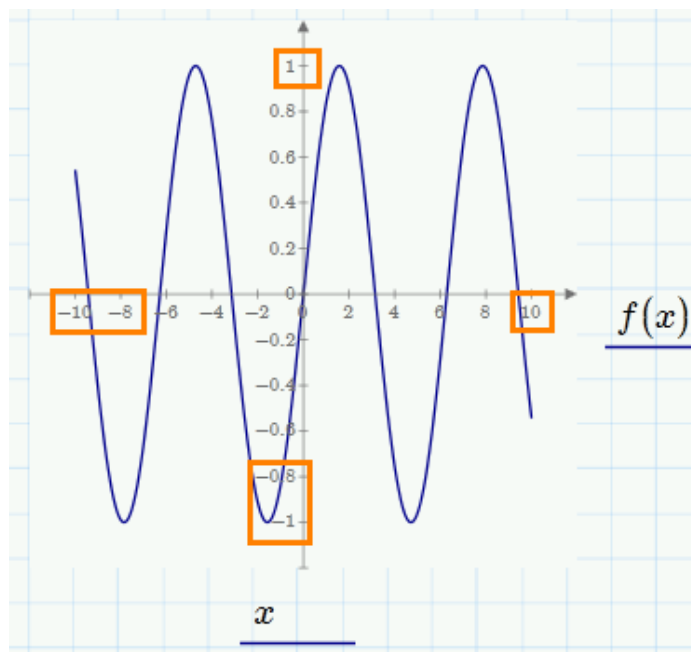


Kuvaajien muokkaus

Kuvaajat-välilehdeltä löytyy monia tapoja muokata kuvaajaa. Välilehdeltä voidaan vaihtaa piirrettyjen pisteiden symbolia ja käyrän tyyliä. Lisäksi välilehdeltä voidaan esimerkiksi muuttaa akseleiden arvojen esitysmuotoa tai piilottaa arvot kokonaan.

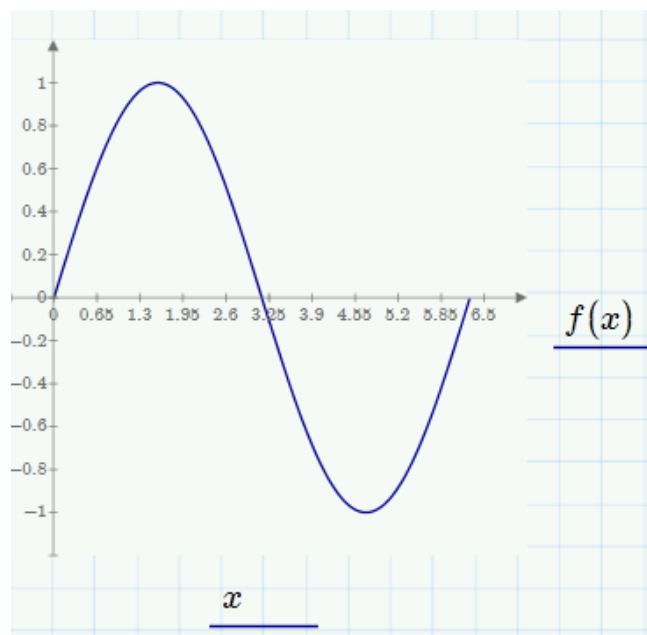


Tarkastellaan vielä äskön piirrettyä kuvaajaa ja erityisesti sen muokkaamista. x-akselin arvoja voidaan muuttaa kahdella tavalla. Yksi tapa on muuttaa akselin ensimmäistä, toista ja viimeistä arvoa. Niitä voidaan klikata kuvaajasta ja niiden kohdalle voidaan kirjoittaa uudet arvot.



Toinen tapa on määritellä x-akselin arvot arvoaluemuuttujan avulla, kuten alla on tehty.

$$x := 0, 0.01 \dots 2 \pi$$



Kuvaajissa akseleita voidaan myös siirrellä tai kuvan kokoa voidaan muuttaa hiirellä raahaamalla.

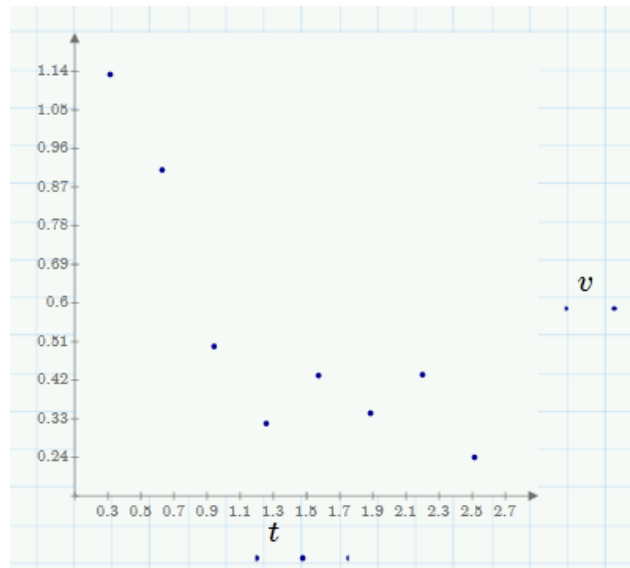
Katsotaan nyt, miten mittauspisteet voidaan parhaiten piirtää kuvaajaksi. Vektoreiden sisältämää dataa voidaan piirtää kuvaajiin samaan tapaan kuin funktioita. Alla on joitakin nopeusmittauksia.

$$t := \begin{bmatrix} 0.314 \\ 0.628 \\ 0.942 \\ 1.257 \\ 1.571 \\ 1.885 \\ 2.199 \\ 2.513 \end{bmatrix} \quad v := \begin{bmatrix} 1.133 \\ 0.91 \\ 0.499 \\ 0.319 \\ 0.431 \\ 0.343 \\ 0.433 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$

Kun datavektorit on määritelty, lisätään laskentapohjaan xy-kuvaaja ja kirjoitetaan y-akselille vektori v ja x-akselille vektori t . Kuvaajaan piirtyy mitatut nopeudet ajan suhteen.

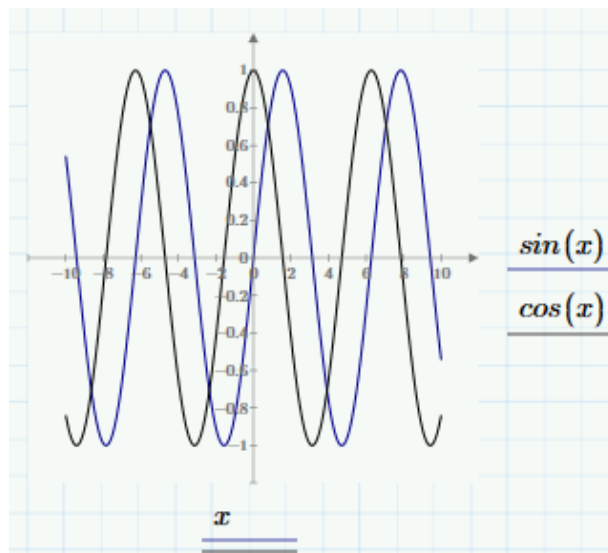


Mathcad yhdistää pisteet oletusarvoisesti viivalla, joten valitaan **Kuvaajat-**välilehdeltä, **Symboli**-listasta sopiva symboli ja tämän jälkeen **Viivan tyyliksi** -listasta asetus (*ei mitään*).



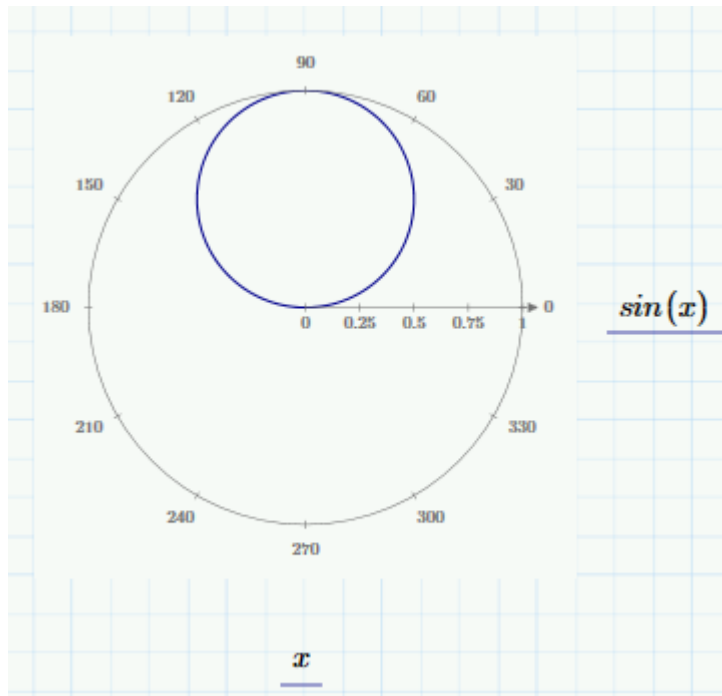
Monta kuvaajaa samassa kuvassa

Kuva voidaan muodostaa useammastakin käyrästä tai datapisteistöstä samaan akselistoon. Klikkaa pystyakselilla olevaa lauseketta ja paina **Shift+Enter**, mikä lisää akselille paikanvaraajan uutta lauseketta varten. Mikäli haluat piirtää usean samasta muuttujasta riippuvan käyrän, vaaka-akselille ei tarvitse syöttää samaa muuttujaa useaan kertaan.



Napakoordinaatisto

Napakoordinaattikuvaajat näytetään ja muodostetaan samaan tapaan kuin xy-kuvaajat. Säteen paikanvaraaja ilmestyy kuvan oikealle puolelle ja kulman paikanvaraaja alapuolelle.

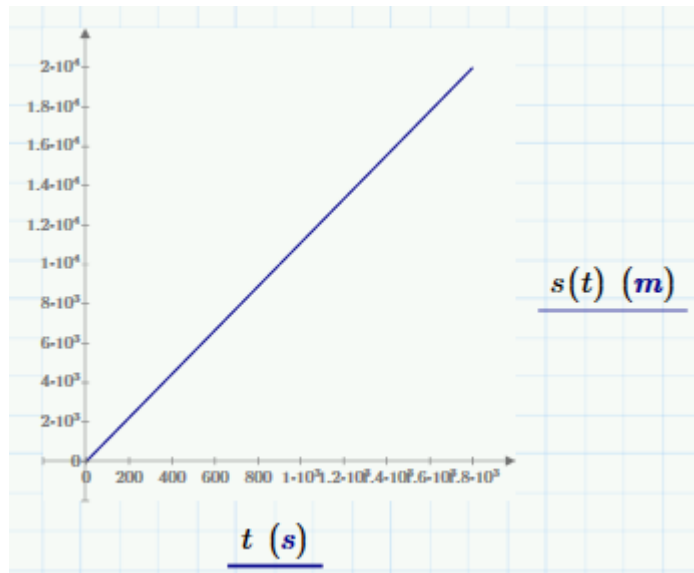
Yksiköiden käyttö 2D-kuvaajassa

Kuvaajissa yksiköille on oma paikanvaraajansa, josta voidaan muuttaa tarvittaessa akselin arvoja. Piirretään etäisyys ajan funktiona ja määritellään sitä varten seuraavat muuttujat ja funktio.

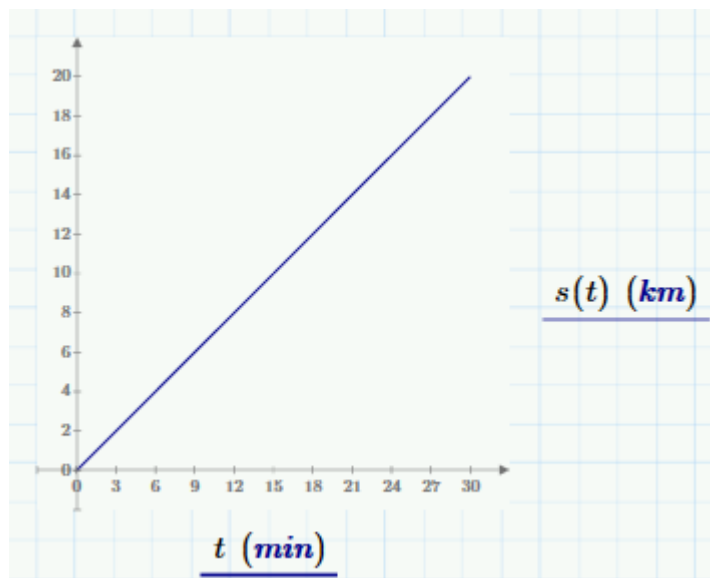
$$v := 40 \frac{\text{km}}{\text{hr}} \quad t := 0 \text{ min}, 0.1 \text{ min} \dots 30 \text{ min}$$

$$s(t) := v \cdot t$$

xy-kuvaaja näyttää tältä:

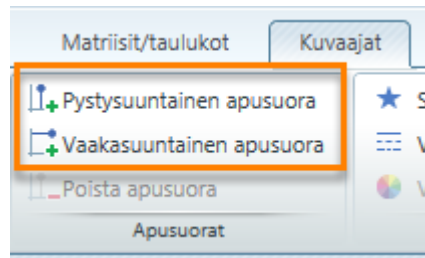


Kuvaajan yksiköitä voidaan muuttaa kirjoittamalla uudet yksiköt niille tarkoitettuihin paikanvaraajiin. Vaihdetaan metrit kilometreiksi ja aika minuuteiksi. Nyt akseleiden arvotkin ovat selkeämmät.

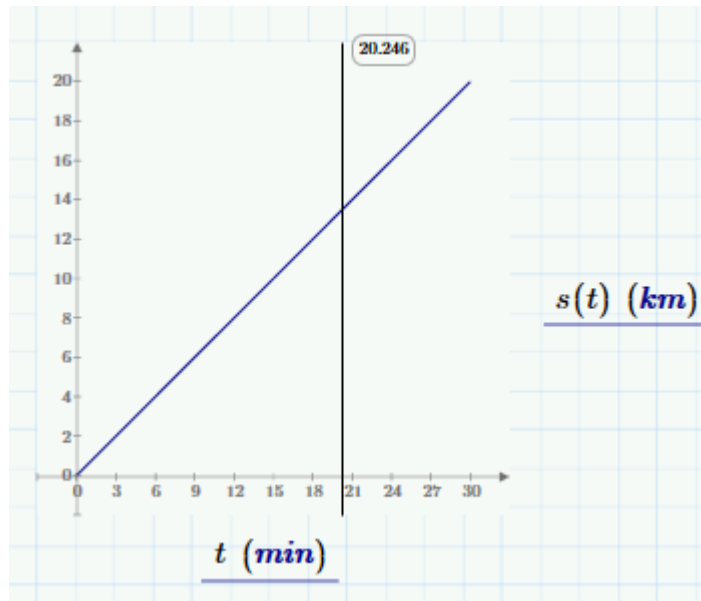


Arvojen lukeminen

Arvojen lukeminen kuvaajasta onnistuu apusuoran avulla.



Lisää pysty- tai vaaka-suuntainen apusuora kuvaajaan ja liikuttele sitä hiirellä. Alla olevassa kuvassa on pystysuuntainen apusuora, jonka oikeassa reunassa lukee x-akselin arvo.

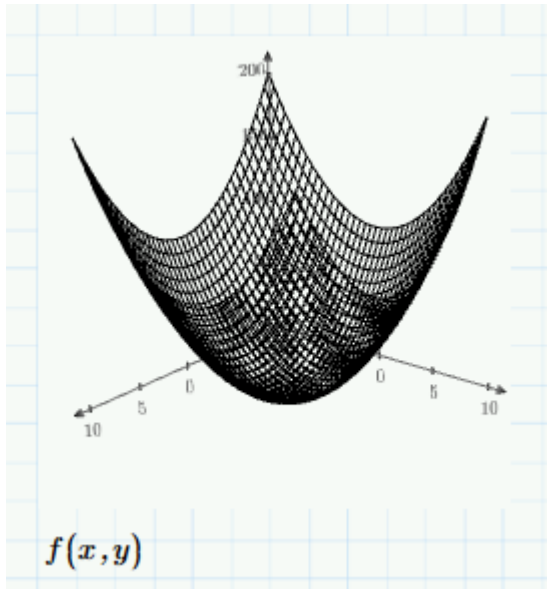


Apusuorien avulla voidaan helposti määrittää esimerkiksi kuvaajan käyrien leikkauspisteitä.

3D-kuvaajat

Aivan kuten 2D-kuvaajiakin, myös 3D-kuvaajia voidaan luoda sekä funktioista että datasta. Määritellään funktio ja syötetään sen nimi 3D-kuvaajan alareunassa olevaan paikanvaraajaan.

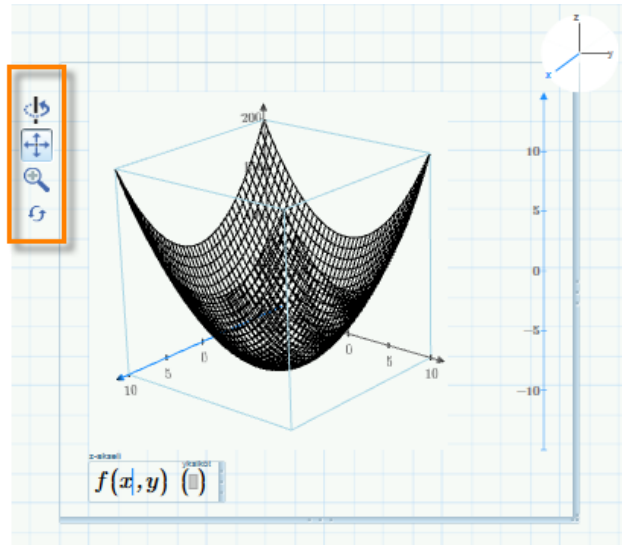
$$f(x, y) := x^2 + y^2$$



Kaikki pintakuvaajat ovat alun perin harmaasävyisiä muuttujien x ja y saadessa arvoja väleiltä $[-10, 10]$ ja $[-10, 10]$.

Muokkaaminen ja katselu

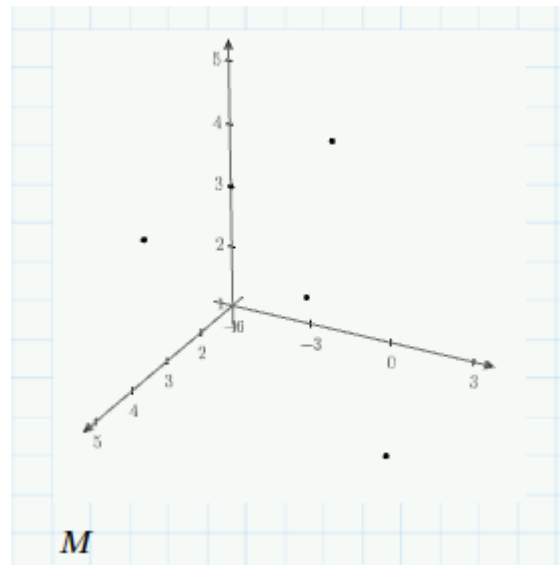
Kuvaajan ulkoasun muokkauskeinoja on useita. 3D-kuvaajien pinnan väriä voidaan muuttaa **Pinnan täyttö** -valikosta ja käyrän väriä taas **Käyrän väri** -valikosta **Tyyli**-ryhmästä. Lisäksi 3D-kuvaajan vasemmasta reunasta löytyy työkalurivi, josta kuvaajaa voidaan zoomata, siirtää tai kiertää.



Hajontakuviio datapisteistä

Mathcadilla voidaan piirtää hajontakuviio datapisteistä matriisin avulla. Matriisin ensimmäinen sarake vastaa x-arvoja, toinen y-arvoja ja kolmas sarake z-arvoja.

$$M := \begin{bmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$



Vaihe vaiheelta 9

Harjoitus 1

Tässä harjoituksessa luodaan kuva toruksesta. *Torus* on geometriassa kaareva pinta, joka muistuttaa auton rengasta tai munkkirinkilää.

1. Määrittele R , joka on renkaan keskipisteen etäisyys toruksen keskipisteestä. Määrittele myös renkaan säde r ja muuttujat u ja v .

$$\begin{array}{ll} R := 20 & u := 0, 0.01 \dots 2 \pi \\ r := 5 & v := 0, 0.01 \dots 2 \pi \end{array}$$

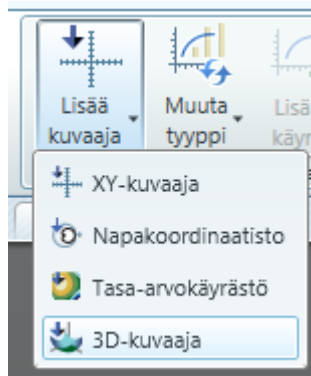
2. Määrittele toruksen koordinaatit parametrimuodossa.

$$\begin{array}{l} x(u, v) := (R + r \cdot \cos(v)) \cdot \cos(u) \\ y(u, v) := (R + r \cdot \cos(v)) \cdot \sin(u) \\ z(u, v) := r \cdot \sin(v) \end{array}$$

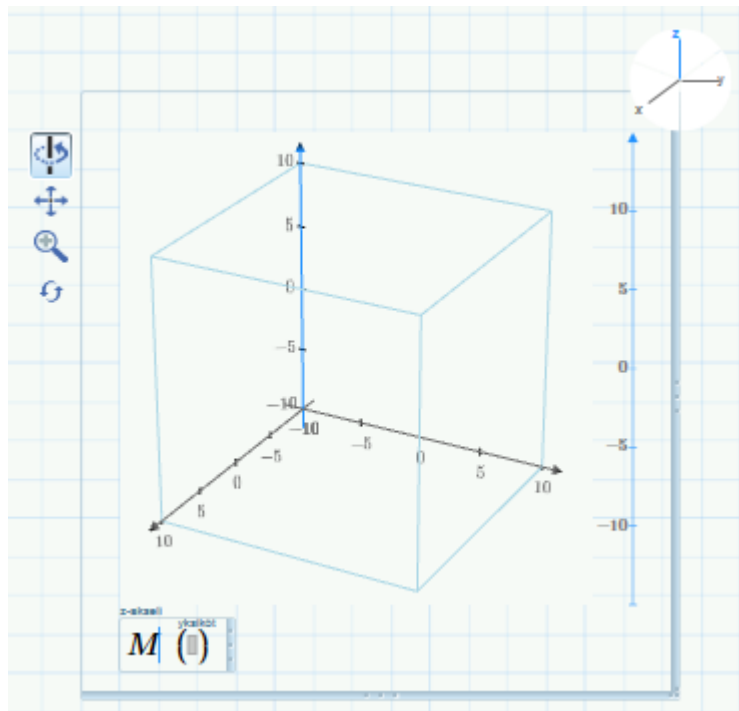
3. Käytetään kuvaajan piirtämiseen CreateMesh-funktiota, joka on hyvin näppärä piirrettäessä kolmiulotteisia kuvaajia. Määrittele mesh1 ja mesh2, jotka määräävät piirrettävien pisteiden lukumäärän eli ruudukon koon. Sijoita CreateMesh-funktion argumenteiksi sitten toruksen koordinaatit ja ruudukon koko.

$$\begin{array}{l} mesh1 := 60 \\ mesh2 := 60 \\ M := \text{CreateMesh}(x, y, z, mesh1, mesh2) \end{array}$$

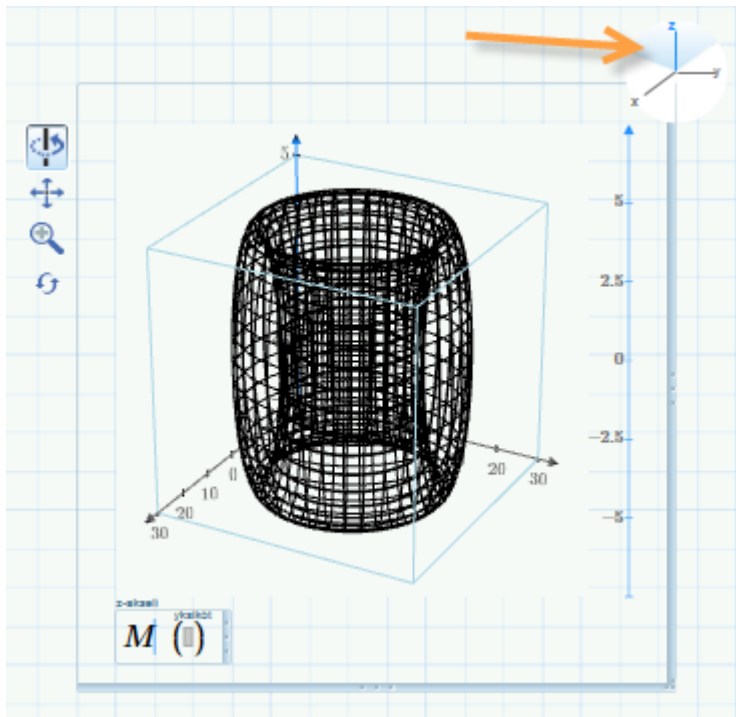
4. Lisää 3D-kuvaaja Kuvaajat-välilehden Graafit-ryhmästä.



5. Kirjoita matriisi M koordinaatiston vasempaan alareunaan ja paina Enter.



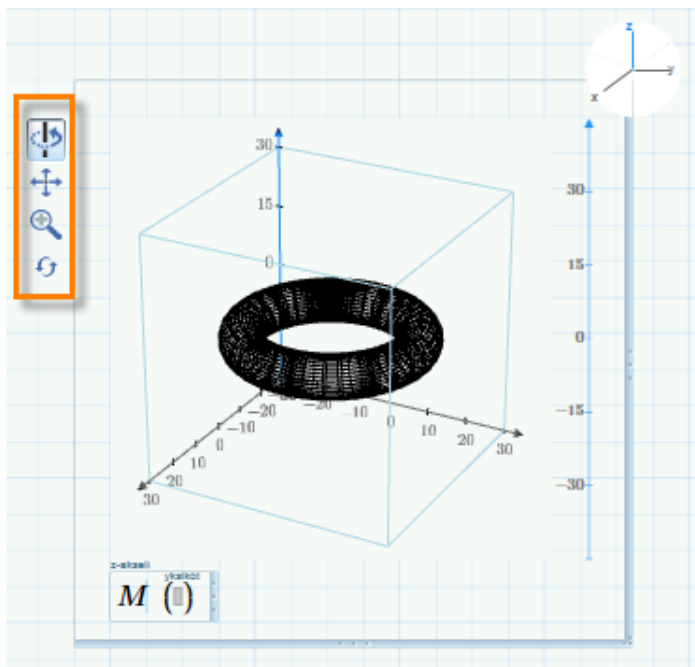
6. Jotta torus näkyisi kuvassa oikeissa mittasuhteissa, z-akselin arvoaluetta on muutettava siten, että se on sama kuin x- ja y-akselin. Valitse z-akseli kuvaajan oikeasta yläreunasta.



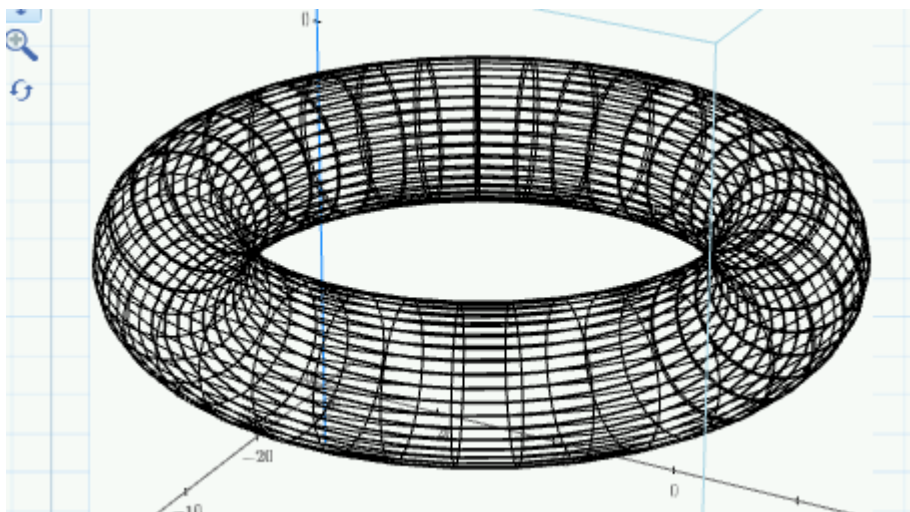
7. Vaihda z-akselin pienimmäksi arvoksi -30 ja suurimmaksi 30.



8. Voit vielä zoomata ja kiertää kuvaajaa oikealla olevista työkaluista nähdäksesi muodostuneen kuvion paremmin.



9. Tässä on torus.



Tehtäviä 9: Kuvaajat

1. Piirrä paraabeli $y = x^2 - 2$ välillä $[-3, 3]$.

Kokeile tämän jälkeen muotoilla kuvaajaa mieleisekseen klikkaamalla sitä ja muuttamalla eri ominaisuuksia. Muuta käyrä esimerkiksi pisteiviivaksi.

2. Edeltävässä harjoituksessa määrittelimme putoavan esineen etäisyydelle funktion ajan suhteen. Tämä määritelmä voitaisi kirjoittaa:

$$D(t, v_0) := v_0 \cdot t + \frac{g}{2} t^2$$

jossa

$$g = 9.807 \frac{m}{s^2}$$

ja v_0 on alkunopeus.

- (a) Määrittele $D(t, v_0)$ omalle dokumentillesi ja piirrä kuvaaja etäisyydestä ajan funktiona. Käytä arvoaluemuuttujaa ajalle t siten, että kuvaaja alkaa 0 sekunnista ja päättyy 20 sekuntiin. Anna alkunopeudelle v_0 jokin sopiva arvo.
- (b) Muotoile kuvaajaa siten, että etäisyys näytetään kilometreinä.
- (c) Piirrä samaan kuvaan toinen käyrä käyttäen alkunopeudelle v_0 eri arvoa. Muotoile toinen käyrä siten, että se näkyy katkoviivana.

3. Juna A lähtee asemalta kiihtyvyydellä $1,1 \text{ m/s}^2$. Juna B lähtee samalta asemalta 3 minuuttia myöhemmin kiihtyvyydellä $2,2 \text{ m/s}^2$. Arvioi graafisesti milloin juna B ohittaa A:n.

Lähtöarvot:

$$a_1 := 1.1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad a_2 := 2.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad t_0 := 3 \cdot 60 \text{ s} \quad t := 0 \text{ s}, 0.1 \text{ s}..190 \text{ s}$$

Yhtälöt:

$$s_1(t) := \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t_0^2 + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2$$
$$s_2(t) := \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2$$

(Piirrä funktiot s_1 ja s_2 samaan kuvaan ja hae leikkauskohta.)

Symbolinen laskenta

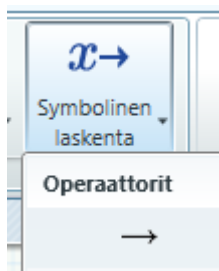
Differentiaali- ja integraalilaskenta symbolisesti

Differentiaalit, integraalit, iteroidut summat ja tulot sekä raja-arvojen operaattorit löytyvät **Matematiikka**-välilehden **Operaattorit**-valikosta. Kaikki nämä operaatiot voidaan suorittaa symbolisesti; kuitenkin vain määrätty integraali ja iteroidut summat ja tulot voidaan laskea numeerisesti.

Differentiaali- ja integraalilaskennan operaattorit

$\otimes$	$*$	d/dx	$\int dx$	$\lim$
$=$	f'	Π	Σ	

Ainoa ero näiden kahden prosessin välillä ilmenee lausekkeen arvoa ratkaistaessa. Symbolisessa laskemisessa tarvitaan symbolisen ratkaisemisen nuolimerkkiä, joka voidaan valita **Symbolinen laskenta** -valikosta tai pikanäppäimellä **Ctrl+.** (piste).



Numeerinen laskenta

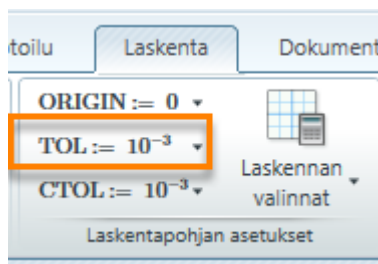
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) dx = 0.293$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n} = 2.929$$

Valitse määrätyn integraalin ikoni tai iteroidun summan ikoni Operaattorit-valikosta. Ratkaise ne yhtäsuuruusmerkkiä käyttäen.

Määrättyjen integraalien tarkkuutta säätelee järjestelmämuuttuja TOL, joka määrää numeerisen algoritmin suppenemisen toleranssin.

Muuttujan TOL arvo on oletusarvoisesti 10^{-3} ja sitä voidaan muuttaa määrittelemällä muuttuja dokumentilla tai valitsemalla arvo **Laskenta-**välilehdeltä. Mikäli työskennellään pienten lukujen kanssa, on järkevää pienentää toleranssia tarkkojen tulosten saavuttamiseksi.



TOL vaikuttaa myös muissa numeerisissa prosesseissa kuten ratkaisulohkoissa ja juurten etsinnässä.

Ratkaiseminen symbolisesti

Huomaa, että symbolisesti ratkaistujen lausekkeiden matemaattisessa ulkoasussa ei ole eroavaisuutta numeerisiin ratkaisuihin verrattuna. Ainoa eroavaisuus on symbolisen laskennan ratkaisuoperaattori, jota ilmaistaan nuolella. Se kertoo Mathcadille, että lauseke tulee käsitellä symboliprosessorilla.

$$\int \sin(x) dx \rightarrow -\cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} (e^x \cdot \ln(x)) \rightarrow \frac{e^x}{x} + e^x \cdot \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e$$

Valitse määräämättömän integraalin, derivaatan tai raja-arvon ikoni Operaattorit-valikosta. Valitse sitten symbolinen ratkaisuoperaattori Symbolinen laskenta -valikosta.

Lisää symbolisesta laskennasta

Symbolista laskentaa voidaan soveltaa paljon muuhunkin kuin vain integraaleihin, derivaattoihin ja raja-arvoihin. Periaatteessa lähes kaikki, mikä voidaan tehdä numeerisesti, on mahdollista suorittaa myös symbolisesti. On kuitenkin syytä pitää mielessä, että symbolinen laskenta on tietokoneelle tyypillisesti monimutkaisempaa käsitellä.

Symboliset avainsanat

Symbolinen laskenta -valikko sisältää lajitelman avainsanoja, joilla hallitaan symbolista laskentaa. Käsittelemme tässä tärkeimpiä ja yleisimmin käytettyjä avainsanoja. Täydellisen kuvauksen jokaisesta avainsanasta löydät Mathcadin Ohjeista (*Mathcad Prime / Symbolinen laskenta*).

Käyttääksesi avainsanaa lausekkeessasi klikkaa paikanvaraajaa symbolisen ratkaisuoperaattorin päältä ja lisää avainsana Symbolinen laskenta -valikosta.

Avainsanat				
assume	cauchy	coeffs	collect	combine
confrac	expand	factor	float	fourier
fully	invfourier	invlaplace	invztrans	laplace
parfrac	rectangular	rewrite	series	simplify
solve	substitute	using	ztrans	

Float määrittelee, kuinka monta numeroa liukuluvussa esitetään.

$$\pi \xrightarrow{\text{float}, 10} 3.141592654$$

Solve ratkaisee yhtälöitä ja yhtälöryhmiä halutun muuttujan (muuttujien) suhteen.

$$2x + 3y - 7z = 4 \xrightarrow{\text{solve}, x} \frac{7 \cdot z}{2} - \frac{3 \cdot y}{2} + 2$$

Huomaa, että tässä käytettiin vertailevaa yhtäsuuruusmerkkiä lausekkeen oikean ja vasemman puolen välissä.

Simplify pyrkii sieventämään lausekkeen käyttämällä aritmetiikkaa, poistamalla yhteisiä tekijöitä ja käyttämällä trignometrisiä funktioita ja niiden käänteisfunktioita.

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} \xrightarrow{\text{simplify}} x + 1$$

Mathcadin symboliprosessori tukee myös **Fourier**-, **Laplace**- sekä **Z**-muunnoksia, kuten myös niiden käänteismuunnoksia.

Fourier-muunnos

$$f(t) := \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-1}{8} \cdot t^2\right)$$

$$f(t) \xrightarrow{\text{fourier}, t} \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot e^{-2 \cdot \omega^2}$$

Laplace-käänteismuunnos

$$f(s) := \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$F(t) := f(s) \xrightarrow{\text{invlaplace}, s} \cos(2 \cdot t)$$

Z-käänteismuunnos

$$\frac{1}{z} \xrightarrow{\text{invztrans}, z} \delta(n - 1, 0) \quad \Delta \text{ on Diracin deltafunktio}$$

Explicit näyttää yhtälön sijoittaen muuttujien paikalle niiden arvot ennen yhtälön arvon laskemista.

$$a := 30.7 \quad b := 5.9 \quad c := 2.36$$

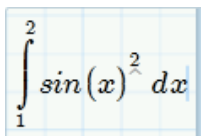
$$a^2 + \sqrt{b - c} \xrightarrow{\text{explicit}, a, b, c} 30.7^2 + \sqrt{5.9 - 2.36}$$

Vaihe vaiheelta 10

Harjoitus 1

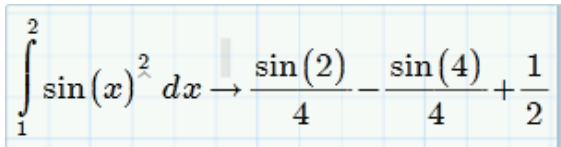
Tässä harjoituksessa opetellaan laskemaan integraalin arvo.

1. Valitse integraalioperaattori Operaattorit-valikosta tai paina Ctrl+Shift+I. Kirjoita paikanvaraajiin seuraavat tiedot.



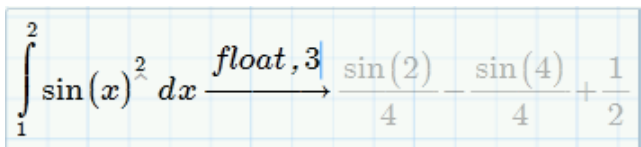
$$\int_1^2 \sin(x)^2 dx$$

2. Lisää symbolinen ratkaisuooperaattori Symbolinen-valikosta tai paina Ctrl+. (piste).



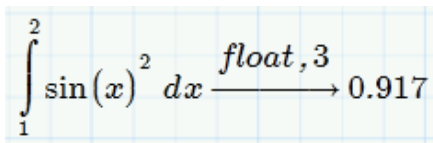
$$\int_1^2 \sin(x)^2 dx \rightarrow \frac{\sin(2)}{4} - \frac{\sin(4)}{4} + \frac{1}{2}$$

3. Kirjoita ratkaisuooperaattorin päälle float, 3.



$$\int_1^2 \sin(x)^2 dx \xrightarrow{\text{float}, 3} \frac{\sin(2)}{4} - \frac{\sin(4)}{4} + \frac{1}{2}$$

4. Kun painat Enter, integraalin ratkaisu muuttuu lukuarvoksi.



$$\int_1^2 \sin(x)^2 dx \xrightarrow{\text{float}, 3} 0.917$$

Harjoitus 2

Tässä harjoituksessa opetellaan yhtälöiden ratkaisemista analyyttisesti avainsanojen avulla.

1. Määrittele funktio $f(x)$. Kirjoita funktion nimen perään : ja funktion yhtälö.

$$f(x) := x^3 - 3x^2 + 2$$

2. Kirjoita $f(x)$ ja lisää symbolinen ratkaisuoperaattori Symbolinen-valikosta tai painamalla Ctrl+. (piste).

$$f(x) \rightarrow x^3 - 3 \cdot x^2 + 2$$

3. Kirjoita nuolen päälle paikanvaraajaan solve, x.

$$f(x) \xrightarrow{\text{solve}, x} x^3 - 3 \cdot x^2 + 2$$

4. Paina Enter, jolloin Mathcad ratkaisee polynomin juuret.

$$f(x) \xrightarrow{\text{solve}, x} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} + 1 \\ 1 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

5. Klikkaa solve-sanaa ja paina Shift+Enter, jolloin avainsanan alapuolelle ilmestyy uusi rivi.

$$f(x) \xrightarrow{\text{solve}, x} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} + 1 \\ 1 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

6. Kirjoita uudelle riville float, 4 ja paina Enter. Nyt juuret esitetään desimaalilukuina.

$$f(x) \xrightarrow{\text{solve}, x, \text{float}, 4} \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.732 \\ -0.7321 \end{bmatrix}$$

Tehtäviä 10: Symbolinen laskenta

1. Määrittele seuraavat funktiot
- f
- and
- g
- :

$$f(x) := \frac{1}{3} e^{2x}$$

$$g(x) := x^2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

- (a) Laske seuraava derivaatta käyttäen Operaattorit-valikon derivointioperaattoria sekä symbolisen laskennan nuolta:

$$\frac{d}{dx}(f(x) g(x))$$

- (b) Sijoita a-kohdan tulos funktion $h(x)$ arvoksi.
- (c) Integroi $h(x)$ symbolisesti. Saatko tulokseksi jälleen $f(x)g(x)$?

2. Luo seuraavankaltainen siirtofunktio
- $T(s)$
- :

$$T(s) := \frac{s-1}{s^2 + 2s + 3}$$

- (a) Etsi osoittajan ja nimittäjän juuret käyttäen avainsanaa *solve*.
- (b) Käytä Laplacen käänteismuunnosta saadaksesi tuloksen aika-alueessa.
- (c) Sijoita tulos uuteen funktioon $R(t)$ ja muodosta sen kuvaaja aikavälillä $t = 0, 0.1..10$.

3. Ratkaise symbolisesti yhtälö
- $15 \cdot x^3 + 145 \cdot x = 0$
- solve-avainsanaa käyttäen.

4. Ratkaise yhtälöryhmästä
- x
- ,
- y
- ja
- z
- .

$$\begin{aligned} 4x + z - y &= a \\ x + y + z &= b \\ 3y + ax &= 3 \end{aligned}$$

5. Käytä symbolista laskentaa seuraavaan laskutoimitukseen.

$$a := 30.537 \, N \quad b := 5.745 \, cm^2$$
$$d := \frac{a}{b}$$

Saatko näkyviin seuraavanlaiset tulokset näkyviin?

$$\frac{30.537 \, N}{b}$$

$$\frac{30.537 \, N}{5.745 \, cm^2}$$

$$\frac{5.3 \cdot N}{cm^2}$$

Yleiskatsaus

Tässä harjoituskirjassa käsiteltiin seuraavia aiheita:

- Johdatus Mathcadin työskentelytilaan
- Käyttäjien saatavilla olevat tietolähteet
- Muuttujien, funktioiden ja matriisien määrittely
- Laskeminen dokumentilla
- Mathcadin alueet
- Dokumentin järjestäminen ja muokkaaminen
- Funktiot
- Yksiköt
- Kuvaajat
- Symbolinen laskenta

Liite B - Ratkaisut

Ratkaisut 1: Tiedon syöttö ja muokkaus

1. Kirjoita seuraava lauseke käyttäen Operaattorit-valikkoa, joka löytyy Matematiikka-välilehdeltä.

$$\int_1^{\frac{\pi}{4}} \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{2\pi\cdot\theta}{5}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi\cdot\phi}{10}\right) e^{\frac{\theta}{\phi}}}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\theta^2 + \phi^2}}\right) \cos(\theta)^2 + \sin(\phi)^3} d\theta d\phi$$

Ratkaisu:

Lisää ensin sisempi integraalioperaattori **Operaattorit**-valikosta. Kirjoita sille alarajaksi 1 ja yläraja seuraavasti: kirjoita p ja paina Ctrl+g, jonka jälkeen paina / ja 2.

Kirjoita ensin osoittaja. Funktiot cos ja sin voidaan kirjoittaa, eikä niitä välttämättä tarvitse lisätä **Kaikki funktiot** -valikosta. Neperin luku e saadaan lisättyä **Vakiot**-valikosta. Valitse välilyönnillä koko osoittaja siten, että kursori jää osoittajan oikealle puolelle ja paina /. Kirjoita nimittäjä.

Kun sisempi integraali on valmis, valitse se kokonaan välilyönnillä ja lisää **Operaattorit**-valikosta integraalioperaattori. Lisää alaraja, yläraja ja integroimismuuttujat.

Ratkaisut 2: Määritelmät

1. Tee seuraavat määritelmät ja ratkaise sitten kaikkien muuttujien arvot.

$$a := 5 \quad b := 10$$

$$c1 := a + b \quad c2 := \frac{a}{b} \quad c3 := a \cdot b \quad c4 := \frac{a}{b \cdot c1 + c2} + c3$$

Ratkaisu:

$$\begin{array}{llll} c1 := a + b & c2 := \frac{a}{b} & c3 := a \cdot b & c4 := \frac{a}{b \cdot c1 + c2} + c3 \\ c1 = 15 & c2 = 0.5 & c3 = 50 & c4 = 50.033 \end{array}$$

2. Määrittele funktio $f(t) = t^2 - 25t + 4,5$ ja laske sen arvot $f(3,5)$ ja $f(0,5)$. Nimeä funktio funktioksi Nimiöstä. Huomaa myös, että ohjelma käyttää desimaalipilkuna pistettä.

Ratkaisu:

$$\begin{array}{l} f(t) := t^2 - 25 t + 4.5 \\ f(3.5) = -70.75 \\ f(0.5) = -7.75 \end{array}$$

Ratkaisut 3: Matriisit ja arvoaluemuuttujat

1. Luo muuttuja y , joka juoksee 0:sta 0,1:een 0,01 välein.

Ratkaisu:

$$y := 0, 0.01 \dots 0.1 \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \\ 0.02 \\ 0.03 \\ 0.04 \\ 0.05 \\ 0.06 \\ 0.07 \\ 0.08 \\ 0.09 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

2. Määrittele matriisi N , joka on kooltaan 50 x 50. Käytä matriisin luomiseen kahta arvoaluemuuttujaa m ja n . Varmista, että $\text{ORIGIN} := 1$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{ORIGIN} &:= 1 \\ m &:= 1 \dots 50 \quad n := 1 \dots 50 \\ N_{m,n} &:= \frac{m+n}{2} \end{aligned}$$

- (a) Poimi matriisista N kunkin kulman alkio.

$$\begin{aligned} N_{1,1} &= 1 & N_{1,50} &= 25.5 \\ N_{50,1} &= 25.5 & N_{50,50} &= 50 \end{aligned}$$

- (b) Poimi matriisiin N 30. sarake ja muodosta siitä uusi muuttuja u .

$$u := N^{(30)}$$

- (c) Käytä arvoaluemuuttujaa saadaksesi matriisista 5. rivi. Muodosta siitä uusi muuttuja w . Varmista, että w on rivi eikä sarake.

$$w_{1,n} := N_{5,n}$$

$$w = [3 \ 3.5 \ 4 \ 4.5 \ 5 \ 5.5 \ 6 \ 6.5 \ 7 \ 7.5 \ 8 \ 8.5 \ \dots]$$

- (d) Toista nyt c-kohta käyttäen transpoosi- ja sarakeoperaattoreita Vektori/matriisioperaattorit-valikosta.

$$w := \left((N^T)^{(5)} \right)^T$$

$$w = [3 \ 3.5 \ 4 \ 4.5 \ 5 \ 5.5 \ 6 \ 6.5 \ 7 \ 7.5 \ 8 \ 8.5 \ \dots]$$

- (e) Laske muuttujien u ja w^T skalaaritulo (pistetulo).

$$u \cdot w^T = 2.376 \cdot 10^4$$

- (f) Käytä Vektorisointi-operaattoria ja laske kullekin u :n ja w^T :n alkion tulo.

$$z := \overrightarrow{u \cdot w^T}$$

$$z = \begin{bmatrix} 46.5 \\ 56 \\ 66 \\ 76.5 \\ 87.5 \\ 99 \\ 111 \\ 123.5 \\ 136.5 \\ 150 \\ 164 \\ 178.5 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

3. Määrittele nelialkioinen vektori v , jossa alkioiden arvot ovat 1,3, 5 ja 7.

Ratkaisu:

(a) Määritellen alkiot yksitellen vektorin alaindeksiä käyttäen. Ratkaise v .

$$v_1 := 1 \quad v_2 := 3 \quad v_3 := 5 \quad v_4 := 7$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(b) Määritellen alkiot arvoalueuuttujan i avulla.

$$i := 1 \dots 4 \quad v_i := 2 \cdot i - 1$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

- (c) Määrittele vektori p_i , jonka alkiot ovat $2 \cdot i + \sqrt{5}$, jossa i on määritelty b-kohdassa. Ratkaise p .

$$i := 1 \dots 4 \quad p_i := 2 \cdot i + \sqrt{5}$$

$$p = \begin{bmatrix} 4.236 \\ 6.236 \\ 8.236 \\ 10.236 \end{bmatrix}$$

- (d) Ratkaise v vaakavektorina.

$$v^T = [1 \ 3 \ 5 \ 7]$$

Käytä vektoreiden ja matriisien funktioita ja määritä vektorin v

- (e) rivien määrä

$$\text{rows}(v) = 4$$

- (f) sarakkeiden määrä

$$\text{cols}(v) = 1$$

- (g) pituus (itseisarvo-operaattori)

$$|v| = 9.165$$

(h) alkioden lukumäärä

$$\text{length}(v) = 4$$

(i) viimeisen alkion indeksi

$$\text{last}(v) = 4$$

(j) suurimman alkion arvo

$$\max(v) = 7$$

4. Matriisi A on seuraavanlainen:

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 5 & 89 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 654 & 65 & 87 \\ 68 & 7 & 53 & 31 & 1 \\ 8 & 6 & 8 & 65 & 15 \end{bmatrix}$$

Ratkaisu:

(a) Määritä matriisin A suurin alkio.

$$\max(A) = 654$$

(b) Määritä matriisin A determinantti.

$$\|A\| = -1.38 \cdot 10^8$$

(c) Määritä matriisin A transpoosi.

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 89 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 654 & 65 & 87 \\ 68 & 7 & 53 & 31 & 1 \\ 8 & 6 & 8 & 65 & 15 \end{bmatrix}$$

(d) Poimi vektoriksi matriisista A kaksi saraketta ja laske niiden pistetulo.

$$\begin{aligned} \text{toinen} &:= A^{(2)} & \text{viides} &:= A^{(5)} & \text{toinen} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} & \text{viides} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 87 \\ 1 \\ 15 \end{bmatrix} \\ \text{toinen} \cdot \text{viides} &= 505 \end{aligned}$$

(e) Määritä matriisin A käänteismatriisi.

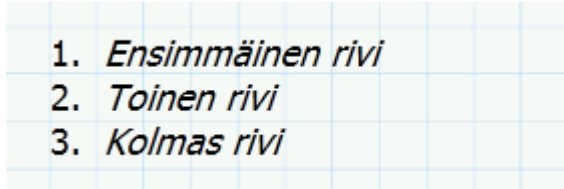
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.027 & 0.009 & 0.002 & 0.017 & -0.009 \\ 0.073 & 0.108 & -0.01 & -0.01 & -0.002 \\ 0.014 & -0.009 & -2.374 \cdot 10^{-4} & -2.416 \cdot 10^{-4} & -4.587 \cdot 10^{-5} \\ 0.023 & -0.03 & -0.003 & -0.002 & 0.02 \\ -0.123 & 0.087 & 0.016 & 0.003 & -0.014 \end{bmatrix}$$

(f) Määritä matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit.

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{bmatrix} 662.816 \\ 26.076 + 32.302i \\ 26.076 - 32.302i \\ 9.187 \\ -13.154 \end{bmatrix}$$
$$\text{eigenvecs}(A) = \begin{bmatrix} -0.134 & 0.134 - 0.094i & 0.134 + 0.094i & 2.286 \cdot 10^{-4} & -0.31 \\ -0.009 & -0.116 + 0.057i & -0.116 - 0.057i & -0.813 & 0.14 \\ -0.986 & 0.133 + 0.051i & 0.133 - 0.051i & 0.07 & 0.074 \\ -0.097 & -0.168 - 0.424i & -0.168 + 0.424i & 0.117 & 0.386 \\ -0.024 & -0.853 & -0.853 & -0.566 & -0.854 \end{bmatrix}$$

Ratkaisut 4: Muotoilu ja dokumentointi

1. Muodosta seuraavanlainen luettelo:



Ratkaisu:

Paina Ctrl+T tekstialuetta varten. Kirjoita *Ensimmäinen rivi*. Paina Enter ja kirjoita *Toinen rivi*. Paina vielä kerran Enter ja kirjoita *Kolmas rivi*.

Maalaa osoittimella koko teksti ja valitse **Muotoilu**-välilehdeltä **numeroitu lista**. Kursivoi sitten teksti painamalla **Kursivoi**-painiketta **Fontti**-ryhmästä.

Ratkaisut 5: Tulosten ja matriisien esitystavat

1. Aseta tässä tehtävässä $\text{ORIGIN} := 1$.

Ratkaisu:

$$\text{ORIGIN} := 1$$

- (a) Määrittele matriisit M ja N .

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad N := \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

- (b) Laske matriisit M ja N yhteen.

$$M + N = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$$

- (c) Luo matriisi P , joka koostuu matriiseista M ja N . Ratkaise P .

$$P := \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} [2 \times 3] \\ [2 \times 3] \end{bmatrix}$$

- (d) Esitä matriisi P siten, että sen sisällä olevat matriisit M ja N näkyvät kokonaan.

$$P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Matriisin P esitystavan saat muutettua klikkaamalla matriisia vastaavaa matemaattista aluetta ja sitten valitsemalla **Matriisit/taulukot-**välilehdeltä **Supista sisäkkäiset matriisit** -painikkeen pois päältä.

- (e) Erottele matriisista P sen alemman matriisin alkio 2,3.

Alkio voidaan ratkaista kahdella eri tavalla:

$$\left(P_2\right)_{2,3} = 12 \quad \left(P_{2,1}\right)_{2,3} = 12$$

- (f) Muuta matriisin N alkion 1,2 arvoksi 0. Ratkaise N .

$$N_{1,2} := 0 \quad N = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

- (g) Määrittele vektoriksi v matriisin M toinen rivi. Ratkaise v .

$$v := (M^T)^{\langle 2 \rangle} \quad v = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- (h) Määrittele vektorin u alkioiksi 1, 2 ja 3. Laske vektoreiden u ja v piste- ja ristitulo.

$$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad u \cdot v = 32 \quad u \times v = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

- (i) Määritä 3×2 -matriisi O ja anna sen arvoiksi -1,1,-1,1,-1,1. Laske matriisien M ja O tulo.

$$O := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad M \cdot O = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -15 & 15 \end{bmatrix}$$

2. Ratkaise integraali. Näytä tulos kuuden desimaalin tarkkuudella.

$$\int_e^{3e} \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Ratkaisu:

Ratkaise integraali. Pidä integraalia vastaava matemaattinen alue valittuna ja valitse **Muotoilu**-välilehdeltä **Esitystarkkuus**-listasta kuusi desimaalia.

$$\int_e^{3e} \frac{\ln(x)}{x} dx = 1.702087$$

3. Valitse **Vakiot**-valikosta Boltzmannin vakio k .

$$k = (1.381 \cdot 10^{-23}) \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}}$$

Ratkaisu:

(a) Näytä vakio viiden desimaalin tarkkuudella.

Lisää vakio **Matematiikka**-välilehden **Vakiot**-valikosta tai kirjoita laskentapohjaan k . Pidä vakiota vastaava matemaattinen alue valittuna ja valitse **Muotoilu**-välilehdeä **Esitystarkkuus**-listasta viisi desimaalia.

$$k = (1.38065 \cdot 10^{-23}) \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}}$$

(b) Tarkastele sitten, miten vakion *Tieteellinen*- ja *Tekniikka*-esitystavat eroavat toisistaan.

Ylempi esitys on *Tieteellinen* ja alempi *Tekniikka*. Esitystapaa saa vaihdettua **Muotoilu**-välilehden **Tuloksen muoto** -valikosta.

$$k = (1.38065 \cdot 10^{-23}) \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}}$$

$$k = (13.8065 \cdot 10^{-24}) \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}}$$

Ratkaisut 6: Dokumentin järjestäminen ja muokkaaminen

1. Lieriön pohjan halkaisija on 26 cm ja korkeus 20 cm.

Ratkaisu:

- (a) Määrittele lieriön tilavuuden kaava ja laske tilavuus.

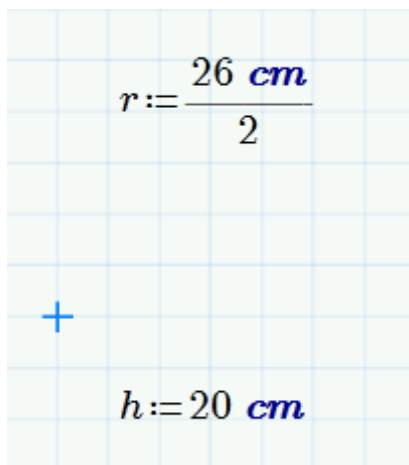
$$r := \frac{26 \text{ cm}}{2}$$
$$h := 20 \text{ cm}$$
$$V := \pi r^2 h$$
$$V = 0.011 \text{ m}^3$$

- (b) Aseta sininen risti muuttujien h ja r välineen ja paina kolme kertaa Enter lisätäksesi muuttujien väliin tyhjää tilaa.

$$r := \frac{26 \text{ cm}}{2}$$
$$h := 20 \text{ cm}$$

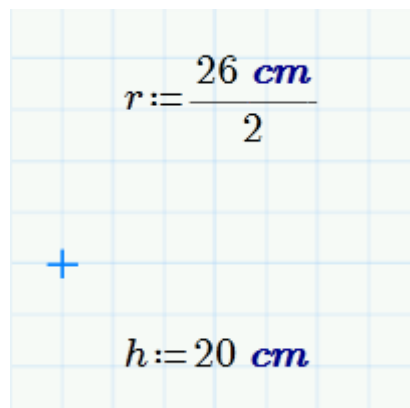
$$r := \frac{26 \text{ cm}}{2}$$
$$h := 20 \text{ cm}$$

- (c) Pidä sininen risti muuttujien h ja r välissä ja paina Askelpalautinta, mikä poistaa tyhjää tilaa matemaattisten alueiden välistä.



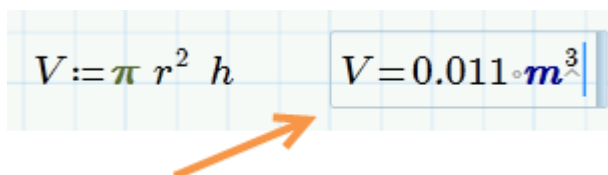
$$r := \frac{26 \text{ cm}}{2}$$

$$h := 20 \text{ cm}$$



$$r := \frac{26 \text{ cm}}{2} + h := 20 \text{ cm}$$

- (d) Liikuttele matemaattisia alueita sivusuunnassa hiirellä. Huomaa, että Mathcad tasaa alueet laskentapohjan ruudukon mukaan.



$$V := \pi r^2 h$$

$$V = 0.011 \text{ m}^3$$

2. Lisää dokumenttiin ylätunniste ja laita siihen

Ratkaisu:

Lisää ylätunniste klikkaamalla **Ylätunniste**-painiketta **Dokumentti**-välilehdeltä.

- (a) Sivunumero oikeaan yläreunaan

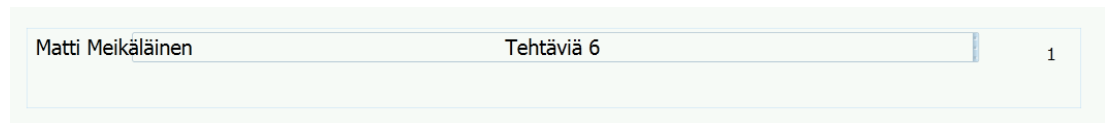
Klikkaa ylätunnisteen oikeaa yläkulmaa ja lisää sivunumero samasta ryhmästä kuin ylätunniste.

- (b) Oma nimi vasempaan yläreunaan

Klikkaa ylätunnisteen vasempaa reunaa ja paina **Ctrl+T** lisätäksesi tekstialueen. Kirjoita alueeseen oma nimesi.

(c) Keskelle otsikoksi ”Tehtäviä 6”.

Klikkaa ylätunnisteen keskeltä ja paina **Ctrl+T** lisätäksesi tekstialueen. Kirjoita siihen ”Tehtäviä 6”. Venytä hiirellä tekstialuetta laskentapohjan ruudukon päihin. Valitse **Muotoilu**-välilehdeltä **tekstin keskitys**, jolloin saat ylätunnisteen otsikon täsmälleen keskelle.



Ratkaisut 7: Funktiot ja ratkaisulohko

1. Ympyrän pinta-ala on

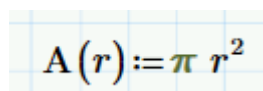
$$A = \pi r^2$$

missä r on ympyrän säde.

Ratkaisu:

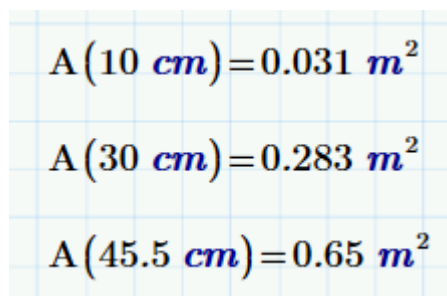
- (a) Määritä ympyrän pinta-ala säteen funktiona. Muodosta siis funktio, joka laskee ympyrän pinta-alan, kun sille annetaan argumentiksi säde.

Kirjoita laskenta pohjaan funktio. Kaksoisklikkaa sen nimeä ja valitse Matematiikka-välilehden nimiöstä *funktio*.



$$A(r) := \pi r^2$$

- (b) Laske ympyrän ala, kun säde on 10 cm, 30 cm ja 45,5 cm.



$$\begin{aligned} A(10 \text{ cm}) &= 0.031 \text{ m}^2 \\ A(30 \text{ cm}) &= 0.283 \text{ m}^2 \\ A(45.5 \text{ cm}) &= 0.65 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

2. Laatikön tilavuus on

$$V = a \cdot b \cdot c$$

missä a , b ja c ovat laatikon sivujen pituudet.

Ratkaisu:

- (a) Määritä laatikon tilavuus sen sivujen pituuksien funktiona. Muodosta siis funktio, joka laskee laatikon tilavuuden, kun sille annetaan argumenteiksi laatikon sivujen pituudet.

Kirjoita laskenta pohjaan funktio. Kaksoisklikkaa sen nimeä ja valitse Matematiikka-välilehden nimiöstä *funktio*.

$$V(a, b, c) := a \cdot b \cdot c$$

- (b) Laske suklaarasian tilavuus funktion avulla, kun rasian mitat ovat 45 mm, 90 mm ja 130 mm.

$$V(45 \text{ mm}, 90 \text{ mm}, 130 \text{ mm}) = 0.527 \text{ L}$$

Mathcad palauttaa tilavuuden oletusarvoisesti litroina. Seuraavassa luvussa käsittelemme tarkemmin yksiköitä, mutta lopputuloksen yksikkö voidaan vaihtaa mielekkäämmäksi poistamalla tuloksen lopusta *L* ja kirjoittamalla tilalle mielekkäämpi yksikkö cm^3 .

$$V(45 \text{ mm}, 90 \text{ mm}, 130 \text{ mm}) = 526.5 \text{ cm}^3$$

- (c) Laske lelulaatikkoon tilavuus, jonka leveys on 28 cm, korkeus 20 cm ja syvyys 38 cm.

$$V(28 \text{ cm}, 20 \text{ cm}, 38 \text{ cm}) = 21.28 \text{ L}$$

3. Olet tekemässä tilastollista analyysiä yrityksesi asiakkaista. Alla on saamasi aineisto, jossa on asiakkaiden iät.

$$ikä := \begin{bmatrix} 35 \\ 45 \\ 56 \\ 32 \\ 32 \\ 51 \end{bmatrix}$$

- (a) Laske asiakkaiden keski-ikä funktion *mean* avulla.

Asiakkaiden keski-ikä on 41,8 vuotta.

$$\text{mean}(\text{ikä}) = 41.833$$

- (b) Haluat laskea myös asiakkaiden iän varianssin eli jakautumisen keskiarvon ympärille. Muistat, että varianssin laskemiseen voitiin käyttää funktiota *Var*, mutta et kuitenkaan tarkalleen ottaen muista, mitä funktion argumentit olivat.

Tarkista funktion toiminta Mathcadin ohjeista kirjoittamalla laskentapohjaa *Var*, kaksoisklikkaamalla funktion nimeä ja painamalla F1. Mitä ovat funktion *Var* argumentit?

Ohjekirjasta avautuu sivu *Varianssi ja keskihajonta*. Sen perusteella funktioon voidaan laittaa argumenteiksi ne matriisit, joista varianssi halutaan laskea.

Argumentit

- *A, B, C, ...* ovat skalaareja tai $m \times n$ -matriiseja.
- *M* on matriisi, joka on luotu funktion argumenteista *A, B, C, ...*.

- (c) Laske asiakkaiden iän varianssi.

Otosvarianssi voidaan laskea kahdella tavalla, vaikkakin jälkimmäinen voi olla aika työläs, jos aineisto on iso.

$$\text{Var}(\text{ikä}) = 106.967$$

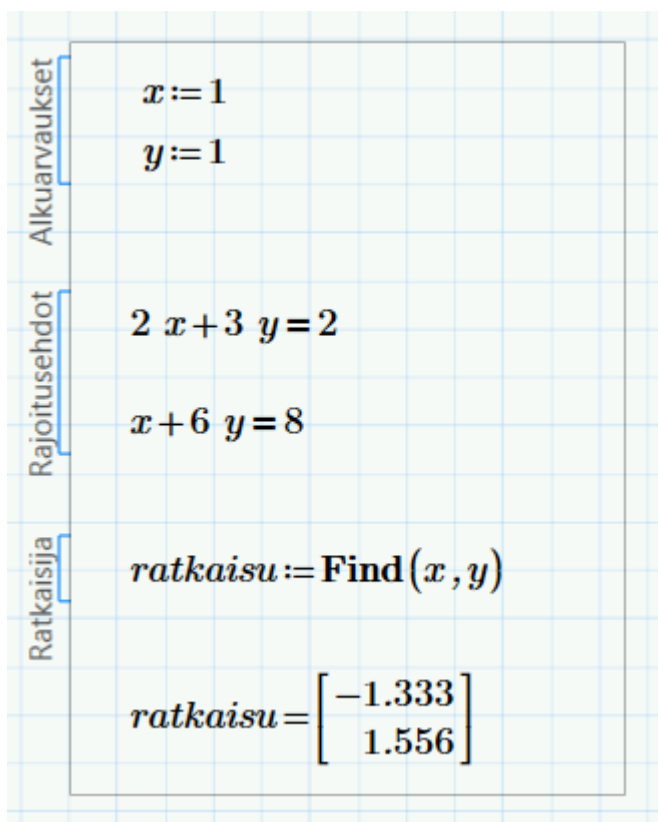
$$\text{Var}(35, 45, 56, 32, 32, 51) = 106.967$$

4. Ratkaise ratkaisulohkolla seuraava yhtälöryhmä.

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 2 \\ x + 6y &= 8\end{aligned}$$

Ratkaisu:

Yhtälöryhmän suorat leikkaavat pisteessä $x = -1,33$ ja $y = 1,556$.



Alkuarvaukset	Rajoitusehdot	Ratkaisija
$x := 1$ $y := 1$	$2x + 3y = 2$ $x + 6y = 8$	$ratkaisu := \text{Find}(x, y)$ $ratkaisu = \begin{bmatrix} -1.333 \\ 1.556 \end{bmatrix}$

Ratkaisut 8: Yksiköt

1. Kulma on $\phi=30$. Laske $\sin \phi$ siten, että kulma

Ratkaisu:

- (a) on annettu radiaaneina.

Sinifunktio olettaa, että siihen sijoitetaan radiaaneja, joten luvulle ei tarvitse tehdä mitään.

$$\sin(30) = -0.988$$

- (b) on annettu asteina.

Asteiden tapauksessa yksikkö tulee kirjoittaa kulman perään.

$$\sin(30 \text{ deg}) = 0.5$$

2. Juoksulenkkisi lenkkisi pituus oli 5500 m ja juoksit sen ajassa 0,7 h.

- (a) Kuinka monta kilometriä juoksulenkkisi oli?

Mathcad antaa tuloksen oletusarvoisesti metreinä, joten lopputuloksessa annetun yksikön tilalle tulee kirjoittaa *km*.

$$s := 5500 \text{ m}$$

$$s = 5.5 \text{ km}$$

- (b) Kuinka monta minuuttia juoksulenkkisi oli?

$$t := 0.7 \text{ hr}$$

$$t = 42 \text{ min}$$

Huomaa, että Mathcadissa tunnit merkitään *hr*.

(c) Laske vielä keskinopeutesi ja anna tulos *km/h*.

$$\begin{aligned}v &:= \frac{s}{t} \\v &= 2.183 \frac{m}{s} \\v &= 7.857 \frac{km}{hr}\end{aligned}$$

3. Funktio $D(t)$, joka kuvaa putoavan esineen etäisyyttä putoamiskohdastaan ajan funktiona, voidaan kirjoittaa näin:

$$\begin{aligned}a &:= g & g &= 9.807 \frac{m}{s^2} \\D(t, v_0) &:= v_0 \cdot t + \frac{a}{2} t^2\end{aligned}$$

jossa $a = g$ = maan vetovoiman aiheuttama kiihtyvyys ja v_0 on alkunopeus.

Ratkaisu:

- (a) Alkunopeudelle $v_0 = 5 \text{ m/s}$ laske, kuinka pitkän matkan esine on kulkenut 2 sekunnin, 15 minuutin ja 30 minuutin jälkeen.

$$\begin{aligned}D\left(2 \text{ s}, 5 \frac{m}{s}\right) &= 29.613 \text{ m} \\D\left(15 \text{ min}, 5 \frac{m}{s}\right) &= (3.976 \cdot 10^6) \text{ m} \\D\left(30 \text{ min}, 5 \frac{m}{s}\right) &= (1.59 \cdot 10^7) \text{ m}\end{aligned}$$

(b) Anna a-kohdan tulos yksiköissä *ft*, *yd* ja *km*.

$$D\left(2\text{ s}, 5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 97.156\text{ ft}$$

$$D\left(15\text{ min}, 5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = (4.348 \cdot 10^6)\text{ yd}$$

$$D\left(30\text{ min}, 5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = (1.59 \cdot 10^4)\text{ km}$$

4. 1600-luvulla Suomessa oli käytössä tilavuusmittayksiköt tuoppi ja kannu. Tuoppi on suuruudeltaan 1,308 litraa ja kannuun mahtuu kaksi tuoppia.

(a) Montako tuoppia on viisi puolentoista litran maitotölkkillistä? Merkitse näkyviin kaikki laskutoimitukset ja käytä niissä litroja.

$$5 \cdot 1.5\text{ L} = 7.5\text{ L}$$

$$\text{tuoppi} := 1.308\text{ L}$$

$$7.5\text{ L} = 5.734\text{ tuoppi}$$

(b) Paljonko a-kohdan tulos on kannuina?

$$\text{kannu} := 2\text{ tuoppi}$$

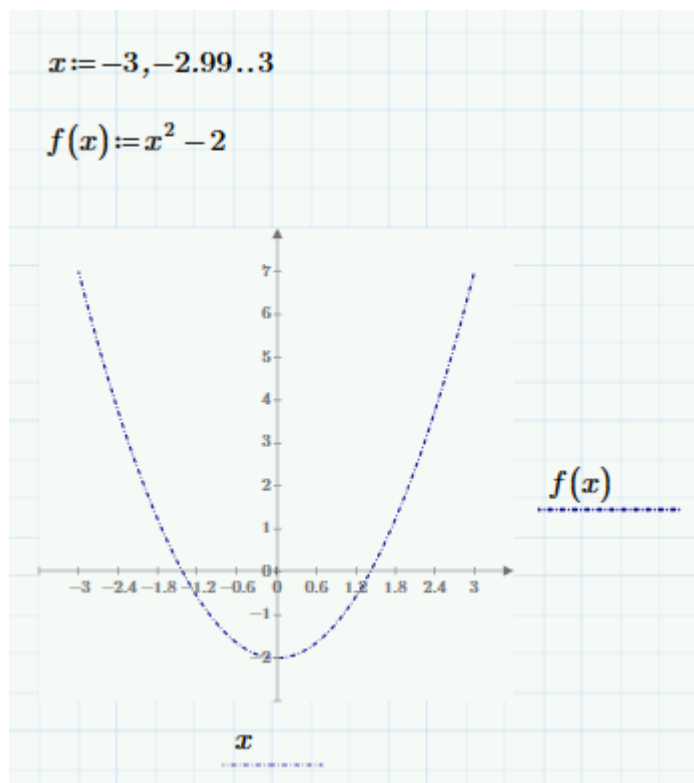
$$5.734\text{ tuoppi} = 2.867\text{ kannu}$$

Ratkaisut 9: Kuvaajat

1. Piirrä paraabeli $y = x^2 - 2$ välillä $[-3, 3]$.

Kokeile tämän jälkeen muotoilla kuvaajaa mieleiseksesi klikkaamalla sitä ja muuttamalla eri ominaisuuksia. Muuta käyrä esimerkiksi pisteviivaksi.

Ratkaisu:



Arvoaluemuuttujaa ei ole pakko määritellä. Käyrä voidaan piirtää ilmankin sitä, jolloin Mathcad piirtää käyrän välille $[-10, 10]$. Tämän jälkeen x-akselin arvoalue voidaan muuttaa itse akselilta vaihtamalla sen ensimmäinen jakoviivan arvo -3 :ksi ja viimeinen arvo 3 :ksi.

Käyrä voidaan muuttaa pisteviivaksi **Tyyli**-ryhmän **Viivan tyyli** -valikosta.

2. Edeltävässä harjoituksessa määrittelimme putoavan esineen etäisyydelle funktion ajan suhteen. Tämä määritelmä voitaisi kirjoittaa:

$$D(t, v_0) := v_0 \cdot t + \frac{g}{2} t^2$$

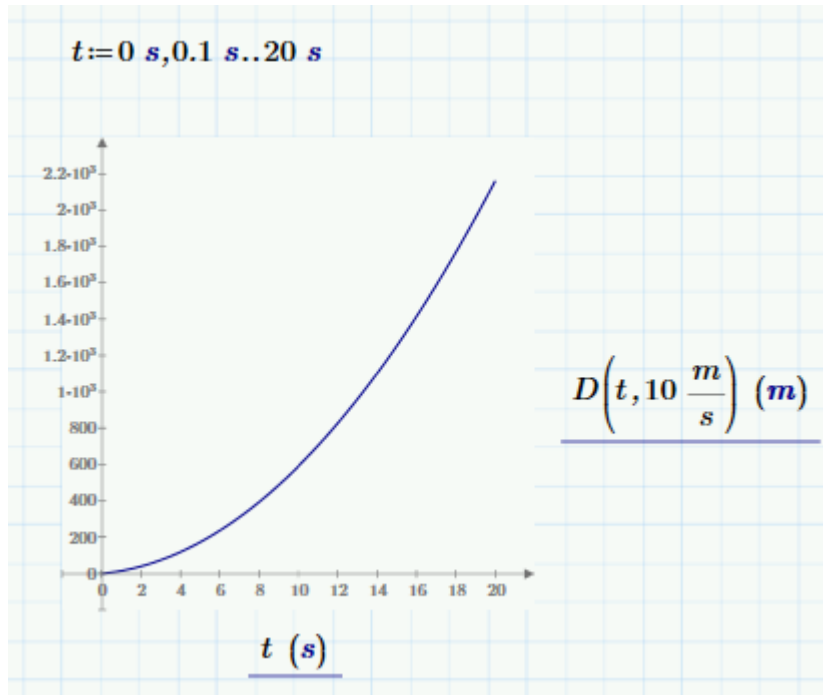
jossa

$$g = 9.807 \frac{m}{s^2}$$

ja v_0 on alkunopeus.

Ratkaisu:

- (a) Määrittele $D(t, v_0)$ omalle dokumentillesi ja piirrä kuvaaja etäisyydestä ajan funktiona. Käytä arvoaluemuuttujaa ajalle t siten, että kuvaaja alkaa 0 sekunnista ja päättyy 20 sekuntiin. Anna alkunopeudelle v_0 jokin sopiva arvo.

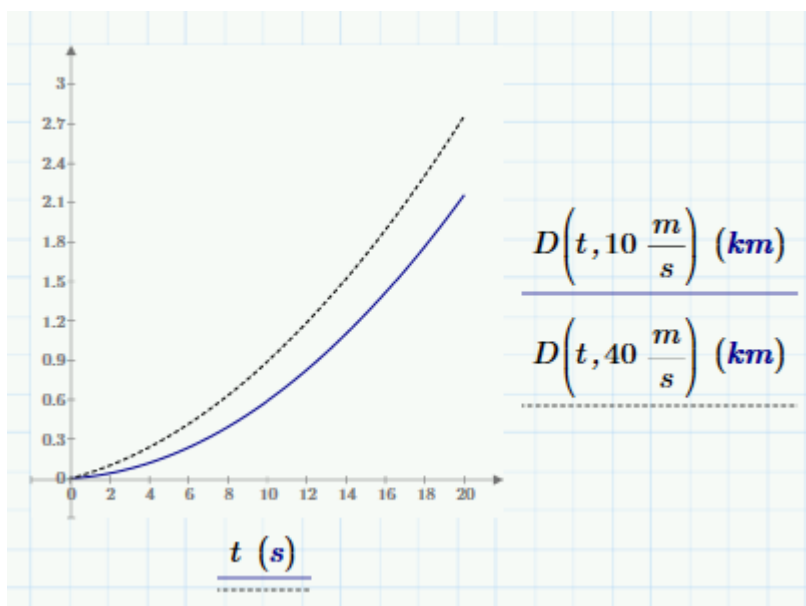


- (b) Muotoile kuvaajaa siten, että etäisyys näytetään kilometreinä.

y-akselin paikanvaraajassa on seuraavanlainen lauseke.

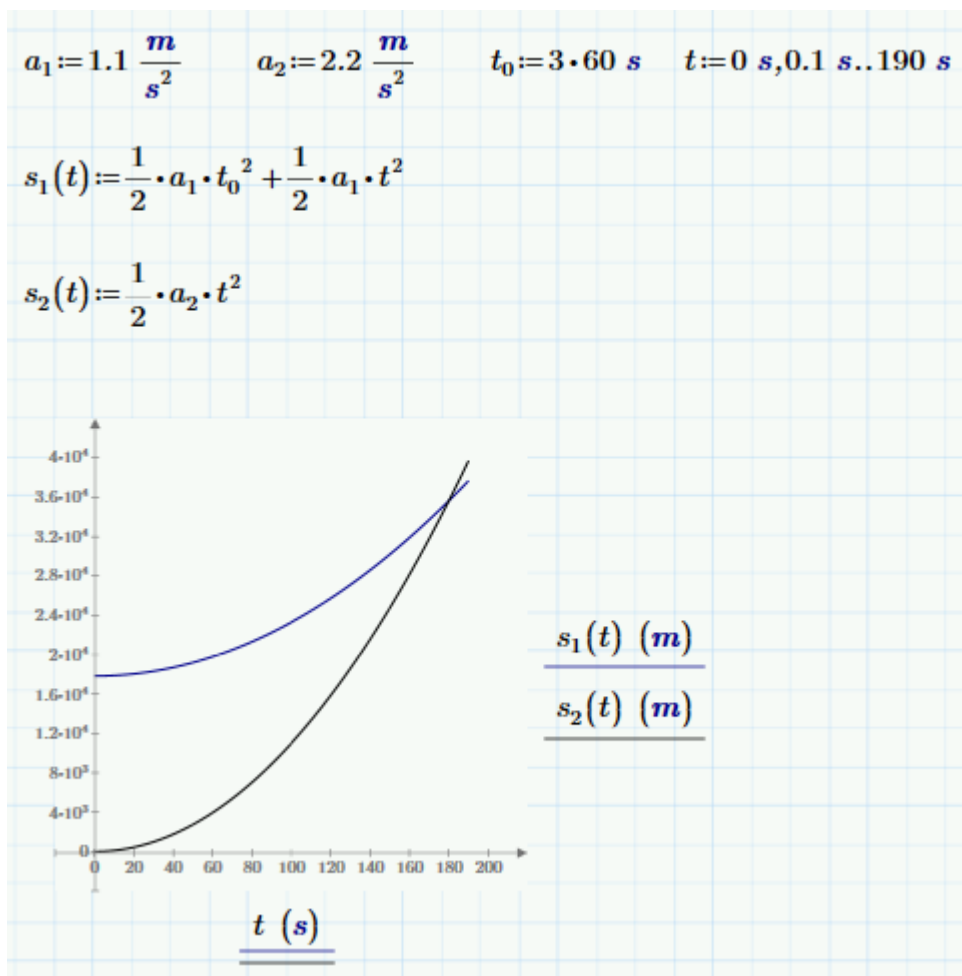
$$D\left(t, 10 \frac{m}{s}\right) (km)$$

- (c) Piirrä samaan kuvaan toinen käyrä käyttäen alkunopeudelle v_0 eri arvoa. Muotoile toinen käyrä siten, että se näkyy katkoviivana.



4. Juna A lähtee asemalta kiihtyvyydellä $1,1 \text{ m/s}^2$. Juna B lähtee samalta asemalta 3 minuuttia myöhemmin kiihtyvyydellä $2,2 \text{ m/s}^2$. Arvioi graafisesti milloin juna B ohittaa A:n.

Ratkaisu:



Käyrät leikkaavat suurinpiirtein kohdassa $t = 178 \text{ s}$ eli noin 3 minuutin kuluttua lähtönsä jälkeen juna B saavuttaa junan A. Leikkauspiste voidaan lukea tarkasti esimerkiksi **Kuvaajat**-välilehdeltä löytyvän **pystysuuntaisen apusuoran** avulla.

Kuvaajan ulkoasua voidaan parantaa esimerkiksi muuttamalla pystyakselin yksiköksi km , jolloin arvot pystyakselilla ovat mielekkäämpiä.

Ratkaisut 10: Symbolinen laskenta

1. Määrittele seuraavat funktiot f and g :

$$f(x) := \frac{1}{3} e^{2x}$$

$$g(x) := x^2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ratkaisu:

(a) Laske seuraava derivaatta käyttäen Operaattorit-valikon derivointioperaattoria sekä symbolisen laskennan nuolta:

$$\frac{d}{dx}(f(x) g(x)) \rightarrow \frac{2 \cdot x^2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot e^{2 \cdot x}}{3} - \frac{x^2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot e^{2 \cdot x}}{6} + \frac{2 \cdot x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot e^{2 \cdot x}}{3}$$

(b) Sijoita a-kohdan tulos funktion $h(x)$ arvoksi.

$$h(x) := \frac{d}{dx}(f(x) g(x)) \rightarrow \frac{2 \cdot x^2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot e^{2 \cdot x}}{3} - \frac{x^2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot e^{2 \cdot x}}{6} + \frac{2 \cdot x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot e^{2 \cdot x}}{3}$$

(c) Integroi $h(x)$ symbolisesti. Saatko tulokseksi jälleen $f(x)g(x)$?

$$\int h(x) dx \rightarrow \frac{x^2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot e^{2 \cdot x}}{3}$$

2. Luo seuraavankaltainen siirtofunktio $T(s)$:

$$T(s) := \frac{s-1}{s^2+2s+3}$$

Ratkaisu:

(a) Etsi osoittajan ja nimittäjän juuret käyttäen avainsanaa *solve*.

OSOITTAJA

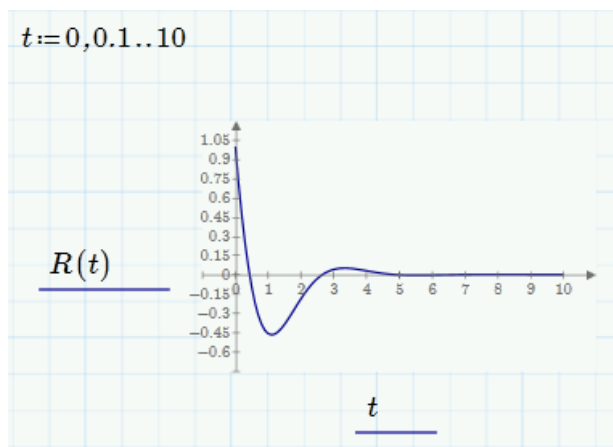
NIMITTÄJÄ

$$s-1 \xrightarrow{\text{solve},s} 1 \qquad s^2+2s+3 \xrightarrow{\text{solve},s} \begin{bmatrix} -1+\sqrt{2}\cdot 1i \\ -1-\sqrt{2}\cdot 1i \end{bmatrix}$$

(b) Käytä Laplacen käänteismuunnosta saadaksesi tuloksen aika-alueessa.

$$R(t) := T(s) \xrightarrow{\text{invlaplace},s} e^{-t} \cdot (\cos(\sqrt{2} \cdot t) - \sqrt{2} \cdot \sin(\sqrt{2} \cdot t))$$

(c) Sijoita tulos uuteen funktioon $R(t)$ ja muodosta sen kuvaaja aikavälillä $t = 0,0.1..10$.



3. Ratkaise symbolisesti yhtälö $15 \cdot x^3 + 145 \cdot x = 0$ solve-avainsanaa käyttäen.

Ratkaisu:

$$15x^3 + 145x = 0 \xrightarrow{\text{solve},x} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{87} \cdot 1i}{3} \\ -\frac{\sqrt{87} \cdot 1i}{3} \end{bmatrix}$$

4. Ratkaise yhtälöryhmästä x , y ja z .

Ratkaisu:

$$\begin{bmatrix} 4x + z - y = a \\ x + y + z = b \\ 3y + ax = 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{solve, } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot a - 3 \cdot b + 6}{2 \cdot a + 9} & \frac{b \cdot a - a^2 + 9}{2 \cdot a + 9} & \frac{12 \cdot b - 3 \cdot a + a^2 + a \cdot b - 15}{2 \cdot a + 9} \end{bmatrix}$$

5. Käytä symbolista laskentaa seuraavaan laskutoimitukseen.

$$a := 30.537 \, N \quad b := 5.745 \, cm^2$$

$$d := \frac{a}{b}$$

Saatko näkyviin seuraavanlaiset tulokset näkyviin?

$$\frac{30.537 \, N}{b}$$

$$\frac{30.537 \, N}{5.745 \, cm^2}$$

$$\frac{5.3 \cdot N}{cm^2}$$

Ratkaisu:

$$a := 30.537 \, N \quad b := 5.745 \, cm^2$$

$$d := \frac{a}{b}$$

$$d \xrightarrow{\text{explicit}, d, a} \frac{30.537 \, N}{b}$$

$$d \xrightarrow{\text{explicit}, d, a, b} \frac{30.537 \, N}{5.745 \, cm^2}$$

$$d \xrightarrow{\text{float}, 2} \frac{5.3 \cdot N}{cm^2}$$